Estratto da

R. Ferro e A. Zanardo (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Volume 3, Siena 8-11 gennaio 1985, Padova 24-27 ottobre 1985, Siena 2-5 aprile 1986.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

SEMANTICA CATEGORICA DELLA SINCRONIZZAZIONE TRA PROCESSI DI CALCOLO

ANNA LABELLA[1], ALBERTO PETTOROSSI[2]
[1]Dipartimento di Matematica, Università di Roma «La Sapienza»
[2]IASI-CNR, Roma

N.B. Alcuni dei risultati qui riportati sono presentati per esteso in [2].

Diversi metodi sono stati considerati in letteratura per definire e studiare computazioni parallele e distribuite. Alcuni di essi fanno riferimento a calcoli algebrici (vedi ad es. [1] e [3]), nei quali la comunicazione tra due processi avviene per "handshaking", cioè per una simultanea offerta di azioni complementari.

Le strutture ad albero costituiscono un modello abbastanza naturale tra quelli possibili; di fatto ne sono state proposte numerose varianti allo scopo di rappresentare i diversi modi in cui il comportamento di un processo risultato è definito a partire da quello dei processi interagenti.

Nel nostro lavoro abbiamo definito e caratterizzato in modo canonico una categoria di alberi che fornisce una semantica per tutte una classe di calcoli di sincronizzazione; essa è ottima in un senso specificato nel seguito. Tale risultato è ottenuto in un contesto più ampio che considera la costruzione di una semantica come il "sollevare" l'operazione parziale di sincronizzazione su un monoide ad un bifuntore (parziale) su una categoria definita sopra tale monoide.

Rispetto ad altre semantiche categoriali proposte in passato (vedi ad es. [4]), questa consente di modellare mediante costruzioni universali le operazioni algebriche dei calcoli CCS [3] e CSP [1].

Partiamo dal presupposto che, riguardo ai processi dei quali parliamo, noi conosciamo soltanto i seguenti fatti:

a) un processo P può compiere un'azione a e divenire un nuovo processo P',

b) le azioni si concatenano in una successione temporale discreta.

Da questa concezione dei processi siamo portati a considerare un monoide di azioni A libero su un alfabeto Λ (con elemento neutro la parola vuota ε) ed una *categoria di processi* come una categoria piccola qualunque $\mathbb{C}$, purché dotata di un funtore $\gamma : \mathbb{C} \to A$, che soddisfa la condizione di fattorizzazione: per ogni morfismo u di $\mathbb{C}$ se $\gamma(u) = a \cdot b$ allora esistono u_1 e u_2 t.c.

$\gamma(u_1) = a$, $\gamma(u_2) = b$ e $u_1 \cdot u_2 = u$.

Ciò vuol dire che i morfismi di $\mathbb{C}$ sono etichettati da parole del monoide A e possono essere fattorizzati fino ad ottenere morfismi etichettati da atomi.

Supponiamo che la cooperazione tra due processi avvenga attraverso una operazione di sincronizzazione definita come segue:

Definizione. Una *sincronizzazione* è un'operazione parziale binaria $*$ su A che verifica le seguenti proprietà:

1. dom($*$) è un submonoide di A^2 liberamente generato da un s.i. di $\Lambda \times \Lambda$,
2. l'operazione $*$:dom($*$) $\longrightarrow$ A è un funtore che soddisfa la condizione di fattorizzazione. □

Data una categoria di processi $\mathbb{C}$ sopra il monoide A è dunque possibile costruire per prodotto fibrato una sottocategoria di $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ con gli stessi oggetti, ma con morfismi soltanto quelli etichettati da coppie appartenenti a dom($*$), cioè sincronizzabili

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \underline{*} \mathbb{C} \arrow[r, tail] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p. f.}"] & \mathbb{C} \times \mathbb{C} \arrow[d, "\gamma \times \gamma"] \\ \mathrm{dom}(*) \arrow[r, tail] \arrow[d, "*"'] & A \times A \\ A & \end{tikzcd}$$

Definizione. $(\mathbb{C},\gamma)$ fornisce una *semantica* per la sincronizzazione $*$ su A, se esiste un funtore $|: \mathbb{C} \underline{*} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ che rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[d, "\gamma"'] & \mathbb{C} \underline{*} \mathbb{C} \arrow[l, "|"'] \arrow[d] \\ A & \mathrm{dom}(*) \arrow[l, "*"] \end{tikzcd}$$ □

Ciò equivale a dire che dati due processi X ed Y si può avere un processo $X|Y$ che è dominio di morfismi etichettati da parole ottenute per sincronizzazione da un'etichetta di un morfismo di dominio X ed una di un morfismo di dominio Y.

Si pone dunque il problema dell'esistenza e dell'unicità di un tale funtore $|$ per una data $(\mathbb{C},\gamma)$ una volta fissata la sincronizzazione. La risposta è in generale negativa, ma si può sempre costruire (come vedremo) una categoria di alberi $\mathbf{A}$ a partire da A per la quale esiste sempre una semantica per ogni sincronizzazione. Diciamo che la *semantica* è *buona* se il funtore $|$ gode della proprietà di essere ereditariamente pieno, e cioè per ogni coppia di oggetti (X,Y) $\hom((X,Y),-) \longrightarrow \hom(X|Y,-)$ è una suriezione.

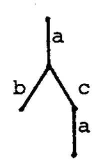
Si riesce a provare:

1) l'unicità della semantica buona per la categoria $\mathbf{A}$,

2) una proprietà universale rispetto ad altre semantiche buone per la stessa sincronizzazione.

Un albero finito etichettato su un alfabeto Λ può essere considerato come un morfismo tra i numeri naturali 1 ed n ottenuto mediante operazioni formali $-\cdot-$, $\langle -,- \rangle$ e $-\times-$ tra morfismi elementari etichettati da elementi di Λ.

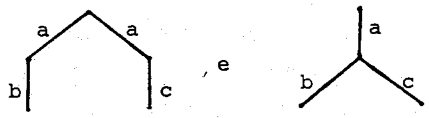
Esempio: L'albero



è descrivibile come $a \cdot \langle b,c \rangle \cdot (\varepsilon \times a)$ □

Valgono alcune equazioni per le suddette operazioni, ad esempio:
$\langle x,y \rangle \cdot (z \times t) = \langle x \cdot z,\ y \cdot t \rangle$.

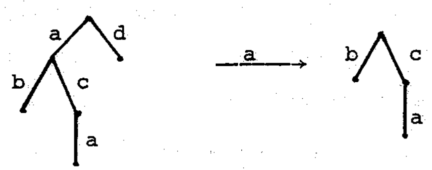
Di fatto si dovranno identificare in un albero rami del tutto uguali, in quanto rappresenterebbero processi sostanzialmente indistinguibili (cioè $\langle S,S \rangle = S$); non si terrà conto dell'ordine di rami (cioè $\langle S1,S2 \rangle = \langle S2,S1 \rangle$) ma si dovranno tenere distinti ad esempio i seguenti alberi:



perché nel secondo c'è la possibilità di scelta tra b e c dopo l'azione a, mentre nel primo non c'è.

La categoria $\mathbf{A}$ degli *alberi sopra* A avrà per oggetti gli alberi sopra introdotti e, dati due alberi T ed S, si avrà un morfismo $T \longrightarrow S$ etichettato dalla parola $s \in A$ se si può scrivere $T = \langle s \cdot S, S' \rangle$ per qualche S'.

Esempio:



□

Risulta che i morfismi corrispondono ai cammini sugli alberi e quindi la categoria $\mathbf{A}$ gode della fondamentale proprietà che per ogni oggetto T, hom(T,-) è descrivibile dallo stesso albero T. Abbiamo cioè una perfetta corrispondenza tra la "struttura interna ed esterna" degli oggetti.

Esiste un funtore $\alpha : \mathbf{A} \longrightarrow A$ che gode della proprietà di fattorizzazione e da ogni altra categoria $(\mathbf{C},\gamma)$ sopra A esiste un funtore

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[rr, "\mathrm{hom}_{\mathbf{C}}"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & \mathbf{A} \arrow[dl, "\alpha"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

il quale rappresenta gli oggetti X di $\mathbf{C}$ come alberi in $\mathbf{A}$ associando loro proprio hom(X,-).

Teorema. $(\mathbf{A},\alpha)$ fornisce una buona semantica per ogni sincronizzazione $*$ su A. Tale semantica è unica, una volta fissata $*$. □

Teorema. Data una sincronizzazione, sia $\mathbf{A} \underline{*} \mathbf{A} \xrightarrow{l_{\mathbf{A}}} \mathbf{A}$ la buona semantica per essa su $\mathbf{A}$ e $\mathbf{C} \underline{*} \mathbf{C} \xrightarrow{l_{\mathbf{C}}} \mathbf{C}$ un'altra buona semantica per la stessa sincronizzazione, esiste sempre un funtore $\mathbf{C} \xrightarrow{\Gamma} \mathbf{A}$ che rende commutativo il diagramma:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \underline{*} \mathbf{C} \arrow[rr, "\Gamma \underline{*} \Gamma"] \arrow[d, "l_{\mathbf{C}}"'] & & \mathbf{A} \underline{*} \mathbf{A} \arrow[d, "l_{\mathbf{A}}"] \\ \mathbf{C} \arrow[rr, "\Gamma"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & \mathbf{A} \arrow[dl, "\alpha"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Tale funtore è unico se ereditariamente pieno. In questo senso la *semantica* su $\mathbf{A}$ è *ottima*. □

La categoria $\mathbf{A}$ è inoltre in grado di esprimere la unione non deterministica di processi [3] come prodotto nella sottocategoria dei soli morfismi etichettati da ε. E' possibile inoltre fornire in $\mathbf{A}$ un'unica semantica per più sincronizzazioni definite sullo stesso monoide libero A, è cioè possibile costruire un unico bifuntore su una sottocategoria di $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$ a partire da diverse sincronizzazioni.

BIBLIOGRAFIA

[1] C.A.R. Hoare: "Communicating Sequential Processes" CACM 21,8 (1978) 666-677.

[2] A. Labella, A. Pettorossi: "Categorical Models of Process Co-operation" Proc. Workshop on "Category Theory and Computer Programming" University of Surrey, England Springer Verlag 1986 (ed. Pitt).

[3] R. Milner: "Calculi for Synchrony and Asynchrony" Theor. Comp. Sc. 25 (1983) 267-310.

[4] G. Winskel: "Categories of Models for Concurrency" LNCS 197, Springer Verlag (1985) 246-247.