Estratto da

R. Ferro e A. Zanardo (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Volume 3, Siena 8-11 gennaio 1985, Padova 24-27 ottobre 1985, Siena 2-5 aprile 1986.





# PRODOTTI DI MODELLI DI TERMINI

MAURIZIO NEGRI

1. Sia $\mathcal{L} = \{\rhd, App, K, S\}$ dove $\rhd$ è un simbolo relazionale 2-ario, $App$ un simbolo funzionale 2-ario, $K$ , $S$ costanti individuali. (Per brevità useremo spesso la semplice giustapposizione di due termini $t_1 t_2$ al posto di $App(t_1,t_2)$ .) Sia $T$ la teoria del primo ordine avente i seguenti assiomi:

$$K v_0 v_1 \rhd v_0, \; S v_0 v_1 v_2 \rhd v_0 v_2 (v_1 v_2), \; v_0 \rhd v_0, \; v_0 \rhd v_1 \rightarrow v_2 v_0 \rhd v_2 v_1,$$
$$v_0 \rhd v_1 \rightarrow v_0 v_2 \rhd v_1 v_2, \; v_0 \rhd v_1 \wedge v_1 \rhd v_2 \rightarrow v_0 \rhd v_2$$

$T$ assiomatizza la $\beta$ -riduzione della logica combinatoria. Sia $\mathcal{M}$ il modello di $T$ avente come dominio i termini di $\mathcal{L}$ e come interpretazione di $\rhd$ la consueta relazione di riduzione indicata da $\mathit{rid}$ . Se consideriamo l'ultrapotenza $\prod_D \mathcal{M}$ , dove $D$ è un ultrafiltro non principale su $\omega$ , possiamo identificare $\mathcal{M}$ con la sottostruttura costituita dalle funzioni costanti, che chiameremo parte standard. Gli elementi non standard di $\prod_D \mathcal{M}$ sono successioni di tipo $\omega$ di termini e tra di essi vi sono tutte le riduzioni dei termini di $T$ , se consideriamo le riduzioni finite come successioni infinite eventualmente costanti. Tuttavia non è possibile pensare ogni elemento non standard come una riduzione, e a questo scopo introduciamo la seguente costruzione che, sotto condizioni abbastanza generali, permette di ottenere un "prodotto" in cui diventa transitiva una relazione che non lo è nei singoli fattori. Otteniamo quindi un modello di $T$ in cui ogni termine si riduce a un oggetto che è la sua riduzione e ogni oggetto non standard può essere considerato come una riduzione di qualche termine. Questo modello, dove termini e riduzioni sono sullo stesso piano, può fornire un quadro generale entro cui studiare i processi di computazione che non terminano e le loro interazioni.

2. Sia $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}$ una famiglia di strutture per $\mathcal{L}$ tale che, per ogni $i,j\in I$, $|\mathcal{A}_i| = |\mathcal{A}_j|$, e per ogni $F\in\mathcal{L}$, $F^{\mathcal{A}_i} = F^{\mathcal{A}_j}$. Sia $\alpha : I \to I$. Definiamo una relazione $\sim_{D,\alpha}$ su $\prod\{|\mathcal{A}_i|\}_{i\in I}$ ponendo $f \sim_{D,\alpha} g$ sse $\{i : f(i) =_{\alpha(i)} g(i)\}\in D$. $=_{\alpha(i)}$ denota l'interpretazione di $=$ in $\mathcal{A}_{\alpha(i)}$ ma poichè questa è sempre l'identità $f(i) =_{\alpha(i)} g(i)$ sse $f(i) = g(i)$, quindi $\sim_{D,\alpha}$ coincide con $\sim_D$, l'usuale congruenza modulo $D$. Definiamo ultraprodotto (modulo $D$) con spostamento $\alpha$ una struttura $\prod_D\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}$ per $\mathcal{L}$ definita come segue. Il suo dominio è $\prod\{|\mathcal{A}_i|\}_{i\in I} / \sim_{D,\alpha}$. Per brevità indichiamo con $\mathcal{B}$ la struttura che stiamo definendo. Le funzioni sono definite punto a punto come negli ultraprodotti, e ciò è possibile perchè il dominio di $\mathcal{B}$ è ancora quello dell'ultraprodotto $\prod_D\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}$ e la relazione $\sim_{D,\alpha}$, coincidendo con $\sim_D$, è una congruenza. Per ogni simbolo relazionale n-ario $p\in\mathcal{L}$, per ogni $f^1_{D,\alpha},\dots,f^n_{D,\alpha}\in|\mathcal{B}|$ ($f_{D,\alpha}$ è la classe di $f\in\prod\{|\mathcal{A}_i|\}_{i\in I}$ modulo $\sim_{D,\alpha}$) varrà $p^{\mathcal{B}}(f^1_{D,\alpha}\cdots f^n_{D,\alpha})$ sse $\{i : p^{\mathcal{A}_{\alpha(i)}}(f^1(i)\cdots f^n(i))\}\in D$.
Se $\alpha(x) = id(x)$, allora $\mathcal{B}$ è $\prod_D\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}$. Come al solito si può dimostrare $t^{\mathcal{B}}(f^1_{D,\alpha}\cdots f^n_{D,\alpha}) = \langle t^{\mathcal{A}_i}(f^1(i)\cdots f^n(i)) : i\in I\rangle_{D,\alpha}$ e vale l'analogo del teorema di Løs:
Teorema 1. $\prod_{D,\alpha}\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}\models\varphi[f^1_{D,\alpha}\cdots f^n_{D,\alpha}]$ sse $\{i : \mathcal{A}_{\alpha(i)}\models\varphi[f^1(i)\cdots f^n(i)]\}\in D$
Supponiamo ora che $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in\omega}$ sia come sopra e che $\{\alpha_h\}_{h\in\omega}$ sia una famiglia di funzioni $\omega\to\omega$, dove $\alpha_h(x) = 2^h\cdot x$. Definiamo $\mathcal{A}^*_h = \prod_{D,\alpha_h}\{\mathcal{A}_i\}_{i\in\omega}$, l'ultraprodotto di $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in\omega}$ con spostamento $\alpha_h$ per ogni $h\in\omega$. Poniamo $\mathcal{A}^* = \bigcup\{\mathcal{A}^*_h\}_{h\in\omega}$. Non si tratta di una unione di catene, perchè $\{\mathcal{A}^*_h\}_{h\in\omega}$ non è una catena di sottostrutture, tuttavia possiamo definire le relazioni e le funzioni come se fosse una unione di catene perchè i domini e l'interpretazione delle funzioni coincidono nelle varie strutture: porremo quindi $P^{\mathcal{A}^*} = \bigcup\{P^{\mathcal{A}^*_h}\}_{h\in\omega}$.
Teorema 2. Siano $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in\omega}$ e $\{\alpha_h\}_{h\in\omega}$ come sopra e sia $\varphi(x,y)\in\mathcal{L}$.
Se per ogni $a, b, c\in|\mathcal{A}^*|$
1. per ogni $n\le m$, $\mathcal{A}_n\models\varphi[a,b]$ implica $\mathcal{A}_m\models\varphi[a,b]$;
2. per ogni $i\in\omega$, $\mathcal{A}_i\models\varphi[a,b]\wedge\varphi[b,c]$ implica $\mathcal{A}_{2i}\models\varphi[b,c]$, allora $\mathcal{A}^*\models\varphi(x,y)\wedge\varphi(y,z)\to\varphi(x,z)$.



3. Consideriamo la famiglia di strutture $\{\mathcal{R}_i\}_{i\in N}$ per $\mathcal{L}$, dove $N = \omega - 1$. Per ogni $i\in N$, $|\mathcal{R}_i| = |\mathcal{R}|$, le interpretazioni dei simboli funzionali e di costante in $\mathcal{R}_i$ coincidono con quelle in $\mathcal{R}$, mentre $\triangleright$ è interpretato sulla riduzione $rid_i$, dove si pone un limite $i$ alla lunghezza della riduzione che lega i termini. Si verifica facilmente che $\bigcup\{\mathcal{R}_i\}_{i\in N}\simeq\mathcal{R}$. Se nel teorema precedente sostituiamo $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in\omega}$ con $\{\mathcal{R}_i\}_{i\in N}$ e $\varphi(x,y)$ con $x\triangleright y$, otteniamo una struttura $\mathcal{R}^*$ modello di $T$. L'assioma di transitività infatti vale in $\mathcal{R}^*$ per il T.2 e ogni altro assioma, valendo in ogni $\mathcal{R}_i$, $i>1$, vale anche in ogni $\mathcal{R}^*_h$, per il T.1, e quindi anche in $\mathcal{R}^*$. Consideriamo ora la sottostruttura $\mathcal{R}\subset\mathcal{R}^*$ costituita dalle successioni costanti, e la chiusura $\bar{\mathcal{R}}^*$ di $\mathcal{R}$ in $\mathcal{R}^*$ rispetto a $rid^*$, l'interpretazione di $\triangleright$ in $\mathcal{R}^*$. E' facile vedere che $\bar{\mathcal{R}}^*\subset\mathcal{R}^*$ e quindi, essendo gli assiomi di $T$ universali, $\bar{\mathcal{R}}^*\models T$. Ogni elemento di $\bar{\mathcal{R}}^*$ è standard se appartiene a $|\mathcal{R}|$, non standard altrimenti. Gli elementi standard sono identificabili con termini di $\mathcal{L}$. Vediamo ora che, per ogni $t\in\mathcal{L}$, ogni riduzione di $t$ può essere rappresentata da un $a\in|\bar{\mathcal{R}}^*|$ e che $\langle t\rangle_{D,\alpha}\, rid^*\, a$. Se la riduzione è una successione finita, per esempio $\langle t_1,\dots,t_n\rangle$, con $t_1\equiv t$ e $t_n\equiv\bar{t}$ è la forma normale di $t$, allora $\langle\bar{t}\rangle_{D,\alpha}$ rappresenta tale riduzione e $\langle t\rangle_{D,\alpha}\, rid^*\langle\bar{t}\rangle_{D,\alpha}$.
Supponiamo ora che la riduzione sia una successione infinita $\langle t_1,\dots,t_n,\cdots\rangle$, dove un termine $t_i$ è ripetuto infinite volte. Allora vi sono dei cicli nella riduzione e supponiamo che vi sia un massimo n per le loro lunghezze. Se $\{q_1,\dots,q_m\}$ è l'insieme dei termini raggiungibili da $t_i$ con meno di n contrazioni, ogni componente di qualsiasi ciclo sarà $q_j$, $j\le m$. Dato che $D$ contiene ogni cofinito $\langle t_1\cdots t_i, t_{i+1}\cdots\rangle\sim_{D,\alpha}\langle t_i\cdots t_i, t_{i+1}\cdots\rangle$. D'altra parte in $\langle t_i\cdots t_i, t_{i+1}\cdots\rangle$ vi sono solo occorrenze di $q_j$, $j\le m$, quindi esiste $q_j$, $j\le m$, tale che $\langle t_i\cdots t_i, t_{i+1}\cdots\rangle_{D,\alpha}\ \langle q_j\rangle$, perchè $D$ è un ultrafiltro.
Quindi questa riduzione ciclica può essere rappresentata da un elemento standard $\langle\bar{t}\rangle_{D,\alpha}$ e vale $\langle t\rangle_{D,\alpha}\, rid^*_1\langle\bar{t}\rangle_{D,\alpha}$. Più in generale si può ottenere che, per qualche $\bar{t}\in\{q_1,\dots,q_m\}$, vale $\langle t\rangle_{D,\alpha}\, rid^*\langle\bar{t}\rangle_{D,\alpha}$.
Se $\langle t_1,\dots,t_n,\cdots\rangle$ non è ciclica, allora $\langle t\rangle_{D,\alpha}\, rid^*_1\langle t_1\cdots t_n\cdots\rangle_{D,\alpha}$.
Più in generale si ottiene $\langle t\rangle_{D,\alpha}\, rid^*\langle t'_1\cdots t'_n\cdots\rangle_{D,\alpha}$ dove $\langle t'_1\cdots t'_n\cdots\rangle$ può ancora considerarsi una riduzione nel senso seguente: esiste un $n$ tale che $t\, rid_{2^n\cdot i}\, t'_i$ e inoltre $\{i : t\, rid_{2^n\cdot i}\, t'_i\}\in D$.

Infine, se la riduzione è ciclica ma non vi è un massimo finito per la lunghezza dei cicli, essa sarà rappresentata da un elemento standard o non standard a seconda dell'ultrafiltro.

Vediamo ora fino a che punto sia possibile considerare ogni elemento non standard come una riduzione. Nel passaggio da $\mathcal{R}^*$ a $\bar{\mathcal{R}}^*$ ci si limita alle successioni $\langle a_0, a_1, \cdots \rangle$ tali che, per qualche termine $a$ e qualche $n \in \omega$ valga $a \; rid_{2^n \cdot 0} \; a_0$, $a \; rid_{2^n \cdot 1} \; a_1$, ... . Si osservi che $a = a_0$. Se definiamo albero di riduzione di $a$ un albero i cui nodi sono termini, nel cui vertice sia $a$ e dove i successori immediati di un nodo sono i termini che da esso si ottengono con una contrazione, vediamo che i rami di tale albero coincidono con le riduzioni di $a$. Se $\langle a_0, a_1 \cdots \rangle$ è una sottosuccessione di un ramo, può essere vista come una riduzione più veloce ottenuta da quella del ramo eseguendo ad ogni passo un insieme finito di contrazioni, ma vi sono casi in cui $\langle a_0, a_1, \cdots \rangle$ può essere dispersa in rami diversi. Se l'albero contiene finiti punti, ogni riduzione è finita e termina con la forma normale $\bar{a}$, quindi $\langle a_0, a_1 \cdots \rangle_D = \langle \bar{a} \rangle_D$. Se vi sono infiniti punti vi è almeno un ramo infinito. Se vi sono anche finiti rami, sia $n$ il loro numero e $X_i$ l'insieme degli indici dei componenti di $\langle a_0, a_1 \cdots \rangle$ appartenenti all'i-esimo ramo. Dato che $\cup \{X_i\}_{i \leq n} = I$ e $D$ è non principale, vi sarà $j \leq n$ tale che $X_j \in D$, e quindi $\langle a_0, a_1 \cdots \rangle$ si potrà considerare ancora come una sottosuccessione del ramo j-esimo. Se vi sono infiniti rami allora la riduzione $\langle a_0, a_1 \cdots \rangle$ potrà essere dispersa fra essi senza potersi identificare come sottosuccessione di alcuno. Per eliminare questa situazione definiamo $\bar{\bar{\mathcal{R}}}^* = \{\langle a_0, a_1 \cdots \rangle_D : \langle a_0 a_1 \cdots \rangle_D \in \bar{\mathcal{R}}^* - \mathcal{R}$ e $\langle a_0, a_1 \cdots \rangle$ è una sottosuccessione di un ramo dell'albero di computazione di $a_0\}$ $\cup \; \mathcal{R}$ (dove $\mathcal{R}$ è la parte standard di $\bar{\mathcal{R}}^*$). $\bar{\bar{\mathcal{R}}}^* \subset \bar{\mathcal{R}}^*$ dato che è chiuso rispetto ad $App$ : se $\langle a_0 a_1 \cdots \rangle_D, \langle b_0 b_1 \cdots \rangle_D \in |\bar{\bar{\mathcal{R}}}^*|$, allora $\langle App(a_0 b_0), App(a_1 b_1), \cdots \rangle_D \in \bar{\mathcal{R}}^* - \mathcal{R}$ e $\langle App(a_0 b_0), App(a_1 b_1), \cdots \rangle$ è una sottosuccessione di un ramo dell'albero di computazione di $App(a_0, b_0)$. Infatti se $\langle a_0, a_1, \cdots \rangle_D, \langle b_0, b_1, \cdots \rangle_D \in |\mathcal{R}^*|$, allora esistono $n, m \in \omega$ tali che $a_0 \; rid_n \; a_1 \; rid_n \cdots$ e $b_0 \; rid_m \; b_1 \; rid_m \cdots$ e allora, se $k = max(n,m) \cdot 2$, $App(a_0, b_0) \; rid_k \; App(a_1, b_1) \; rid_k \cdots$

Gli elementi non standard di $\mathcal{R}^*$ si discostano dalle riduzioni anche per la velocità a cui procede la riduzione. Se assumiamo come sopra che $a \; rid_{2^n i} \; a_i$, associamo a $\langle a_0, a_1, \cdots \rangle$ una successione $\langle n_i \rangle_{i \in \omega}$ dove $n_i = 2^n \cdot i$. Per gli elementi di $\bar{\mathcal{R}}^*_n$ si hanno $\langle n_i \rangle_{i \in \omega}$ che sono maggiorate da $\langle 2^n \cdot i \rangle_{i \in \omega}$ per qualche $n \in \omega$. Quindi considerando come velocità di una riduzione il massimo numero di contrazioni ad ogni passo, vediamo che in $\bar{\mathcal{R}}^*$ si hanno riduzioni di ogni possibile velocità, ma che ciascuna di essa ha velocità finita. Questo caratterizza $\mathcal{R}^*$ rispetto all'ultrapotenza di $\mathcal{R}$, nella quale sono possibili riduzioni in cui il numero di contrazioni aumenta ad ogni passo senza un limite finito, caratteristica che si è voluta eliminare per rendere il concetto di riduzione più vicino a quello di computazione effettuabile. Si osservi comunque che l'assunzione di riduzioni aventi tutte le velocità finite è ineliminabile se si vuole poter applicare le riduzioni le une alle altre come oggetti combinatori qualsiasi. Infatti se $\langle a_0, a_1, \cdots \rangle$. $\langle b_0, b_1, \cdots \rangle$ sono riduzioni usuali, allora l'oggetto $App(\langle a_0, a_1 \cdots \rangle_D, \langle b_0, b_1, \cdots \rangle_D) = \langle App(a_0, b_0), App(a_1, b_1), \cdots \rangle_D$ è una riduzione in cui ad ogni passo si effettuano due contrazioni.