Estratto da

A. Zanardo (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Volume 4, Siena 27-30 maggio 1987.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

TAVOLA ROTONDA SUL TEMA "LA LOGICA NELLA MATEMATICA" INTERVENTO INTRODUTTIVO

MARIO CURZIO
Università di Napoli

Queste brevi note, nell'attuale momento in cui si pensa ad una ristrutturazione del corso di Laurea in Matematica, presentano il parere in un algebrista sulla evidente necessità di inserire in organico un insegnamento obbligatorio di Logica. Non è qui in questione il solo valore formativo dell'insegnamento suddetto, ad esempio è chiaro che uno studente all'oscuro di fondamentali nozioni di insiemistica, non potrà rendersi conto del fatto che ogni spazio vettoriale ammette basi o che un ideale proprio di un anello con unità è incluso in qualche ideale massimale.

L'intrecciarsi di Algebra e di Logica è ormai frequente nella formulazione di importanti problemi e nella struttura dei risultati ottenuti. Tutto ciò sarà illustrato da tipiche situazioni tratte dalla teoria dei gruppi, ma allo scopo funzionano egregiamente tutti i rami dell'Algebra.

(A) La teoria dei gruppi infiniti, anche se la si vuole limitata alle sole proprietà finitarie, fa uso in modo essenziale della nozione di serie *ascendente* (e di quella duale) di un gruppo G. Una siffatta serie è un insieme $\{G_\alpha / \alpha \leq \beta\}$ di sottogruppi di G dove: gli indici sono ordinali, $G_0 = \{1\}$ e $G_\beta = G$, $G_\sigma \leq G_\tau$ per $\sigma \leq \tau$, G_α normale in $G_{\alpha+1}$ per ogni $\alpha < \beta$, $G_\alpha = \bigcup_{\gamma<\alpha} G_\gamma$ se α è un ordinale limite (un sottogruppo appartenente ad una tale serie dicesi *ascendente*).

Un gruppo G chiamasi iperfinito se dotato di una serie ascendente $\{G_\alpha / \alpha \leq \rho\}$ con ogni quoziente $G_{\alpha+1}/G_\alpha$ finito $(\alpha < \rho)$ e. la classe dei gruppi iperfiniti include quella dei gruppi finiti come ovvio.
Se G possiede una serie $\{G_\alpha / \alpha \leq \rho\}$ con ogni G_α normale in G e con ogni $G_{\alpha+1}/G_\alpha$ sottogruppo del centro di G/G_α, suol dirsi che G è ipercentrale (i gruppi nilpotenti sono particolari gruppi ipercentrali). L'esistenza di una serie ascendente $\{G_\alpha / \alpha \leq \rho\}$ con i quozienti $G_{\alpha+1}/G_\alpha$ abeliani, definisce G come un gruppo iperabeliano; si ha subito che ogni gruppo risolubile è iperabeliano. Non è il caso di accennare ai copiosi risultati che hanno origine dalle definizioni suddette, il Lettore potrà ottenere le prime informazioni dal trattato di D. J. S. Robinson : Finiteness conditions and generalized soluble groups, vol. I, II (Springer, 1972).
Si tralasciano poi importanti teorie che sfruttano gli ultraprodotti e gruppi algebricamente chiusi o (essenzialmente chiusi) in classi opportune.

(B) Se G è un gruppo a centro identico, tale è pure il gruppo $\mathrm{Aut}\, G$ dei suoi automorfismi. La torre di automorfismi $T(G)$ vien definita dall'essere: $G_0 = G$, $G_\alpha \hookrightarrow \mathrm{Aut}\, G_\alpha = G_{\alpha+1}$ dove l'immersione si ottiene associando ad $x \in G_\alpha$ l'automorfismo interno determinato da x, $G_\alpha = \bigcup_{\rho<\alpha} G_\rho$ se α è un ordinale limite. Il problema della torre ha risposta positiva se per ogni gruppo G esiste un ordinale ρ (dipendente o non da G) tale che $G_\rho = G_\alpha$ qualunque sia $\alpha > \rho$.
Un primo risultato è classicamente dovuto a Wielandt (Math. Z., 45 (1939), 209-244): se G è finito, $T(G)$ termina con un numero finito di passi. Altri notevoli contributi parziali si trovano in lavori di Rae - Roseblade (1970) e di Hulse (1970).
La risposta nel caso generale è stata data solo nel 1985 da S. Thomas (Proc. of Am. Math. Soc., 95 (1985), 166-168), si prova che $T(G)$ si arresta al più dopo $(2^{|G|})^+$ passi, dove i cardinali sono intesi come ordinali iniziali e dove $(2^{|G|})^+$ è il minimo cardinale regolare $> 2^{|G|}$. L'importanza del risultato consiste fra l'altro nel fatto che un gruppo arbitrario può essere immerso come sottogruppo ascendente in un gruppo completo C (un gruppo dicesi completo se è a centro identico e se allo stesso tempo ogni automorfismo è interno), se G è infinito si ottiene anche $|C| \leq (2^{|G|})^+$.
Non è ancor noto se $(2^{|G|})^+$ fornisce per $T(G)$ la migliore limitazione possibile, ma il limite dipende da $|G|$, invero: se α è un ordinale e se $k = \max\{\omega, \alpha\}$, esiste un gruppo G a centro identico tale che $|G| = k$ e che $T(G)$ termini dopo esattamente α passi.
Con le tecniche adoperate da S. Thomas si può dimostrare che se $\mathcal{L}$ è un'algebra di Lie di dimensione finita o non, la torre delle algebre delle derivazioni di $\mathcal{L}$ possiede al più $(2^{\dim \mathcal{L}})^+$ termini effettivi quando $\mathcal{L}$ è a centro identico. La cosa era già nota fin dal 1951 (Schenkman) nel caso $\dim \mathcal{L} < \infty$.

(C) Il problema di O. J. Schmidt, formulato negli anni 30, consiste nello stabilire se non esistono gruppi infiniti a sottogruppi abeliani tutti finiti. Caso particolare ne è il problema (cosiddetto di Tarski) circa l'esistenza o meno di gruppi infiniti G_p i cui sottogruppi non banali hanno per ordini uno stesso numero p (ovviamente $p > 2$ e sufficientemente grande). Nella stessa ottica ci si può chiedere se è estensione finita di un gruppo risolubile, ogni gruppo G a condizione massimale o minimale su i suoi sottogruppi.
Le precedenti domande hanno tutte risposta negativa, Rips ha infatti costruito nel 1979 un gruppo di Tarski G_p. In una serie di notevoli lavori (+) apparsi a partire dal 1979, Ol'šanskii ha dimostrato

(+) Ad esempio (nelle traduzioni in inglese):
Soviet Math. Dokl., 20 (1979), 343-345; Math. U.S.S.R. Izv., 15 (1980), 531-588; Math. U.S.S.R. Izv., 16 (1981), 279-289.

fra l'altro che esistono gruppi infiniti i cui sottogruppi non banali hanno ordini primi che non coincidono con uno stesso p .
Le dimostrazioni dei teoremi di Ol'šanskii sono di carattere logico-informatico più che gruppale, vi si adoperano metodologie che procedono per "livelli" come spesso si usa fare nella logica matematica.

(D) Un problema di teoria dei gruppi abeliani, esaminato a fondo da alcuni logici, è il cosiddetto problema (W) (da Whitehead). Siano A e B dei gruppi abeliani, il primo libero. E' ben noto che $\mathrm{Ext}(A, B) = 0$, cioè che si spezza ogni estensione abeliana di B mediante A , in particolare $\mathrm{Ext}(A, \mathbb{Z}) = 0$ dove $\mathbb{Z}$ sta ad indicare il gruppo additivo degli interi. Il problema (W) consiste nel chiedersi se, essendo A un gruppo abeliano tale che $\mathrm{Ext}(A, \mathbb{Z}) = 0$, risulti A libero (++). Denotata con ZFC la teoria di Zermelo - Fraenkel completata dall'assioma della scelta, un famoso teorema di Shelah (Isr. J. Math., 18 (1974), 243-256) garantisce che (W) è indecidibile in ZFC. Si tratta di un risultato scioccante per la tribù degli abelianisti cosiddetti "concreti", in realtà non vi è nulla di drammatico al di fuori di un evidente razzismo.
L'ipotesi del continuo $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ è stata utilizzata ancora da Shelah per dimostrare che in ZFC + $(2^{\aleph_0} = \aleph_1)$ è consistente una risposta negativa a (W) per i gruppi abeliani di cardinalità $\aleph_1$. Quanto sopra conduce all'indecidibilità di (W) in ZFC + $(2^{\aleph_0} = \aleph_1)$, ciò adoperando un ulteriore risultato di Shelah ed il teorema di Gödel sulla consistenza di $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

(++) La risposta è affermativa per i gruppi abeliani numerabili, come trovato da Stein (Math. Ann., 123 (1951), 201-222). In proposito si ricorda che un gruppo abeliano numerabile è libero se, e solo se, tale è ogni suo sottogruppo di rango finito (criterio di Pontryagin). Il suddetto criterio non vale per i gruppi abeliani di cardinalità $\geq \aleph_0$, come evidenziato da Specker per i gruppi $G = \prod_{i \in I} A_i$ con $|I| \geq \aleph_0$ e $A_i \simeq \mathbb{Z}$ per ogni $i \in I$.

(E) Il problema di cui in (D) può essere elegantemente formulato anche in termini di gruppi topologici.
Dal principio di dualità di Pontryagin discende che una risposta positiva alla questione (W) equivale al fatto che ogni gruppo abeliano compatto e connesso per archi sia prodotto di copie di $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

(F) Si conclude con una congettura formulata da Tomkinson in occasione del "Convegno di teoria dei gruppi" tenuto a Debrecen nel 1987.
Sia $G = \bigcup_{\lambda<\alpha} A_\lambda$ un gruppo dove: α è un cardinale infinito, A_λ è un sottogruppo abeliano (per ogni $\lambda < \alpha$). Detto C il centro di G , si sa che

$$|G/C| \leq 2^{2^\alpha}$$

e che esistono G tali che $|G/C| = 2^\alpha$. La congettura sta nella validità della disuguaglianza

$$|G/C| \leq 2^\alpha$$

qualunque sia $G = \bigcup_{\lambda<\alpha} A_\lambda$.