ASSIOMI X_1 COMPLESSIVI GLOBALI (UNA GENERALIZZAZIONE DELL'ASSIOMA X_1 PER INSIEMI)

MASSIMO CLAVELLI
Facoltà di Economia e Commercio - Università di Cassino

L'assioma di libera costruzione X_1 è stato introdotto in ambiente insiemistico in [5] .
Altri assiomi di libera costruzione, precedentemente introdotti in ambiente insiemistico , sono stati generalizzati in modo relativamente consistente ad ambienti di tipo non solo insiemistici come la teoria Q (cfr. [1],[2] e [4]) .

Per generalizzare in modo relativamente consistente l'assioma X_1 è necessario introdurre delle definizioni, alcune delle quali sono già state introdotte in [1] , e dimostrare la consistenza relativa di assiomi anche complessivi di universalità superatomica globale.
La trattazione è svolta nell'ambito della teoria Q , ma quanto detto è valido anche per gli universi della teoria A (cfr. [3]) (in questo caso le formule σ_i possono essere sostituite con collezioni)

DEFINIZIONI

Le "strutture tipiche" sono particolari operazioni o grafici funzionali aventi per valori solo 0 e 1 .
f si dirà "struttura tipica" di "tipo n+1", se il dominio di f è $B^1 \times A^n$ con $A \supseteq B$ classi , $n \in \mathbb{N}$.

f si dirà "struttura tipica" di "tipo $(m+1,k+1)$" dove $m\in\mathbb{N}$, $k\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, $m<k$, $\infty+1=\infty$, se il dominio di f è $\biguplus_{n=m}^{k} B^1 \underline{\times} A^n$, $A\supseteq B$ classi.

In entrambi i casi, A verrà detta l'ambiente di f e verrà denotata con amb(f) , B verrà detta "classe degli oggetti" di f e verrà denotata con ogg(f) .

Se una struttura tipica è una operazione la si dirà "operativa", se una struttura tipica è un grafico funzionale la si dirà "grafica" .

Un grafico funzionale (risp. grafico funzionale iniettivo) h si dice un "epimorfismo" (risp. "isomorfismo") tra le strutture tipiche f e g, se, ristretto all'ambiente di f è una surgezione (risp. bigezione) tra gli ambienti di f e di g e (indicata con $\emptyset$ la 0-upla) $(f(x_0,\dots,x_n)=y \Leftrightarrow g(h(x_0),\dots,h(x_n))=y) \& (f\emptyset=y \Leftrightarrow g\emptyset=y)$.

Se f e g sono strutture tipiche, f si dice "g-standard" se $\mathrm{dom}\, g \supseteq \mathrm{dom}\, f$ e $\forall x \in \mathrm{dom}\, f\ (f(x)=g(x))$.

Siano f e g strutture tipiche, f si dirà "g-transitiva" se: $\mathrm{ogg}(f)\supseteq(\mathrm{amb}(f)\cap\mathrm{ogg}(g))\&((g(x_0,x_1,\dots,x_n)=1\& \& x_0\in\mathrm{amb}(f))\Rightarrow x_1,\dots,x_n\in\mathrm{amb}(f))$.

Siano $f_1,\dots,f_n$ strutture tipiche, un grafico funzionale h si dice un "epimorfismo $f_1-\dots-f_m-f^*_{m+1}-\dots-f^*_n$-massimale" se esistono $g_1,\dots,g_n$ strutture tipiche tali che h è un epimorfismo tra f_i e g_i , h ristretto a $((\biguplus_{i=1}^{n}\mathrm{amb}(f_i))-(\biguplus_{i=1}^{n}\mathrm{ogg}(f_i)))$ è iniettivo, per $i=m,\dots,n$ e $x\in\mathrm{ogg}(f_i)$ h ristretto a $\underline{x}_{f_i}$ è iniettivo, e inoltre è iniettivo ogni grafico funzionale k tale che l'ambiente di k sia $\biguplus_{i=1}^{n}\mathrm{amb}(g_i)$, k sia un epimorfismo

per $i=1,\dots,n$ tra g_i e una struttura tipica, k ristretto a $((\biguplus_{i=1}^{n}\mathrm{amb}(g_i))-(\biguplus_{i=1}^{n}\mathrm{ogg}(g_i)))$ sia iniettivo e per $i=m,\dots,n$ e $x\in\mathrm{ogg}(g_i)$ k ristretto a $\underline{x}_{g_i}$ sia iniettivo.

Con $\underline{x}_f$, dove f è una struttura tipica e $x\in\mathrm{ogg}(f)$, intendo $\{y\in\mathrm{ogg}(f)/\forall z(f([x]\underline{.}z)=1\Leftrightarrow f([y]\underline{.}z)=1)\}$ (con $[x]$ intendo la 1-upla di x e con $\underline{.}$ il prodotto concatenato delle n-uple $(x_1,\dots,x_n)\underline{.}(y_1,\dots,y_m)= =(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$) .

Gli assiomi

In quanto segue le φ_i sono opportune strutture tipiche e le σ_i sono formule con una variabile libera tali che $\sigma_i(f)$ implica che f è una struttura tipica.

Assioma (complessivo) di $\sigma_1-\dots-\sigma_n-\varphi_1-\dots-\varphi_n$-universalità superatomica globale.

"Siano $f_1,\dots,f_n$ tali che $\sigma_i(f_i)$, $\mathrm{ogg}(f_i)\cap\mathrm{ogg}(f_j)=\emptyset$ per $i\neq j$, $((\biguplus_{i=1}^{n}\mathrm{amb}(f_i))-(\biguplus_{i=1}^{n}\mathrm{ogg}(f_i)))\cap(\biguplus_{i=1}^{n}\mathrm{ogg}(\varphi_i))=\emptyset$ e sia C una classe contenuta in $(\biguplus_{i=1}^{n}\mathrm{amb}(f_i))-(\biguplus_{i=1}^{n}\mathrm{ogg}(f_i))$; allora esiste un grafico funzionale iniettivo h , tale che, per $i=1,\dots,n$, h è un isomorfismo tra f_i e una struttura tipica φ_i-standard e φ_i-transitiva e h ristretto a C è l'identità."

Assioma $\sigma_1-\dots-\sigma_n-\varphi_1-\dots-\varphi_{m'}-\varphi^{\#}_{m'+1}-\dots-\varphi^{\#}_m-\varphi^*_{m+1}-\dots-\varphi^*_{n'}-\varphi^{*\#}_{n'+1}-\dots\varphi^{*\#}_n-X_1$ superatomico globale (complessivo)

L'assioma si divide in due parti denominate "esistenza" e "unicità".

UNICITA':"Siano $f_1,\dots,f_n,g_1,\dots,g_n$ tali che $\sigma_i(f_i)$, $\sigma_i(g_i)$, f_i e g_i siano φ_i-standard e φ_i-transitive , e e si supponga che esista un grafico funzionale iniettivo h , tale che per $i=1,\ldots,n$ h sia un isomorfismo tra f_i e g_i , per $i=m,\ldots,n$ e $x\in ogg(f_i)$ si abbia $(f_i(x,y_1,\ldots,y_k)=1 \Rightarrow (h(y_1)=y_1 \& \ldots \& h(y_k)=y_k) \Rightarrow h(x)=x$, valga $(y\in x_{f_i} \& y\neq x) \Rightarrow h(x)\neq h(y)$ per $i=m,\ldots,n$ e

h ristretto ad $((\bigcup_{i=1}^{n} amb(f_i)) - (\bigcup_{i=1}^{n} ogg(f_i)))$ sia l'identità ; allora h ristretto a $\bigcup_{i=1}^{n} amb(f_i)$ è l'identità."

ESISTENZA:"Siano $f_1,\ldots,f_n$ e sia C una classe, tali che $\sigma_i(f_i)$, $ogg(f_i)\cap ogg(f_j)=\emptyset$ per $i\neq j$, $C\subseteq(\bigcup_{i=1}^{n} amb(f_i))-(\bigcup_{i=1}^{n} ogg(f_i))\subseteq V-\bigcup_{i=1}^{n} ogg(\varphi_i)$, tali che per ogni k epimorfismo $f_1-\ldots-f_m-f^{*}_{m+1}-\ldots-f^{*}_{n}$-massimale per $i=m',\ldots,m,n',\ldots,n$ $(f_i(x_1,\ldots,x_p,y)= =f_i(x_1',\ldots,x_p',y)=1 \& (k(x_1)=k(x_1') \& \ldots \& k(x_p)=k(x_p'))) \Rightarrow$ $\Rightarrow k(y)=k(y')$; allora esiste un grafico funzionale h tale che per $i=1,\ldots,n$ h è un epimorfismo tra f_i e una struttura tipica φ_i-standard e φ_i-transitiva e h ristretto a C è l'identità, e inoltre $(y\in x_{f_i} \& y\neq x)\Rightarrow h(x)\neq$ $\neq h(y)$."

L'asterisco contrassegna le strutture da considerarsi intensionali e il diesis quelle da considerarsi funzionali.

Gli assiomi vengono detti "non-globali" se le σ_i sono rappresentabili da classi (nella teoria Q di [4])

UN ESEMPIO DI ASSIOMI CONSISTENTI

(relativamente a ZF+"esiste un inaccessibile" per quanto riguarda la teoria Q di [4])

Si considerino definite come in [1] le strutture tipiche φ_{urpl} e φ_{op} e le nozioni (relative alle strutture tipiche) di "estensionale", "semplice", "funzionale".

Sia φ_{clel} il grafico funzionale tale che:

$\varphi_{clel}:(V-Ur)\times V \longrightarrow \{0,1\}$; $\varphi_{clel}(x,y)=1 \Leftrightarrow y\in x$

Sia $\sigma_{clel}\equiv$"essere una struttura tipica grafica di tipo 2 ed estensionale" .

Sia $\sigma_{urpl}\equiv$"essere una struttura tipica grafica di tipo $(1,\infty)$, semplice ed estensionale" .

Sia $\sigma_{op}\equiv$"essere una struttura tipica grafica di tipo 3 e funzionale".

Sono relativamente consistenti i due assiomi:

i) $\sigma_{clel}-\sigma_{urpl}-\sigma_{op}-\varphi_{clel}-\varphi_{urpl}-\varphi_{op}$-universalità superatomica globale .

ii) $\sigma_{clel}-\sigma_{urpl}-\sigma_{op}-\varphi_{clel}-\varphi_{urpl}-\varphi^{*\#}_{op}-X_1$ superatomico globale .

(si ottiene un assioma equivalente ad ii indebolendo σ_{clel} e σ_{urpl} togliendo l'estensionalità)

La consistenza relativa di ii si ottiene da quella di i mediante un procedimento di quozientizzazione , analogamente si procede in altri casi ragionevoli. (nel caso di assiomi non-globali non serve quindi l'ipotesi di consistenza dell'inaccessibilità)

BIBLIOGRAFIA

[1] Clavelli "Principi di libera costruzione, relativi alla teoria quadro dei fondamenti della matematica di De Giorgi-Forti"At.Accad.Lincei(1986) (to appear)

[2] Clavelli "Consistenza relativa dell'assioma complessivo di superuniversalità per..."(to appear)

[3] Clavelli-De Giorgi-Forti-Tortorelli "A self-reference oriented theory for the fondaments of Mathematics" (to appear sul volume in onore di Lyons)

[4] De Giorgi-Forti "Una teoria quadro dei fondamenti della matematica" At.Accad.Lincei(1986)

[5] Forti-Honsell "Set theory with free construction principles"An.S.N.S.di Pisa (1983)