Estratto da

A. Zanardo (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Volume 4, Siena 27-30 maggio 1987.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

UN APPROCCIO CATEGORIALE ALLA LOGICA PREDICATIVA MODALE E LINEARE DISTRIBUTIVA

S. GHILARDI - G.C. MELONI
Università di Milano

§1_ Sia X un prefascio di insiemi definito su una categoria piccola C: dato un attributo A, ossia assegnato un sottoinsieme A_α di X_α per ogni oggetto α di C, risulta naturale considerare il sottoprefascio $\Diamond A$ generato da A e il massimo sottoprefascio $\Box A$ contenuto in A. Tali operatori unari possono essere visti come operatori modali temporali in quanto soddisfano la regola:

$$\Diamond A \vdash B \quad \text{sse} \quad A \vdash \Box B$$

che caratterizza il sistema K_t. (Poiché C è una categoria valgono per entrambi anche gli assiomi modali di S4). Mentre però $\Box$ commuta con le immagini inverse lungo trasformazioni naturali (cioè dal punto di vista logico con le sostituzioni), per $\Diamond$ vale soltanto la legge:

(SC) $$\Diamond f^{\cdot} A \vdash f^{\cdot} \Diamond A \,.$$

Risulta quindi chiara l'inadeguatezza dei linguaggi logici tradizionali, troppo legati in questo senso al linguaggio ordinario, a trattare situazioni di questo tipo: poiché la sostituzione di una variabile con un termine è direttamente eseguita sulle formule atomiche, si assume implicitamente che essa commuti con tutti i connettivi e con i quantificatori. Tale implicita assunzione nella logica classica e intuizionista ha come unica conseguanza l'esclusione del dominio vuoto, mentre nella logica modale ha effetti molto più pesanti; è infatti facile dimostrare, utilizzando la semantica dei prefasci oppure un calcolo logico di tipo categoriale che espliciti le sostituzioni, che:

a) la formula Barcan $\forall\xi\Box A\vdash\Box\forall\xi A$ equivale alla commutatività fra $\Diamond$ e le proiezioni;

b) la necessità dell'identità $x_1=x_2\vdash\Box(x_1=x_2)$ (dove $\Box$ è definito al solito come $\neg\Diamond\neg$) equivale alla commutatività fra $\Diamond$ e le diagonali.-

La situazione dei prefasci può essere generalizzata fino al punto di richiedere che per ogni freccia i in C, X_i sia una <u>relazione</u> anzichè una funzione. Si ottiene così la seguente tavola di corrispondenza fra principi logici e condizioni semantiche:

Assiomi equivalenti	Condizioni semantiche corrispondenti
0) logica classica (con esplicitazione delle sostituzioni)+K_t+S4+(SC)	le transizioni sono relazioni arbitrarie
1) $x_1=x_2\vdash\Box(x_1=x_2)$ $x_1\neq x_2\vdash\Box(x_1\neq x_2)$ $\Diamond(x_1\neq x_2)\vdash x_1\neq x_2$ $\Diamond(x_1=x_2)\vdash x_1=x_2$ $\Delta^{\cdot}\Diamond A\vdash\Diamond\Delta^{\cdot}A$ $\Box\Delta^{\cdot}A\vdash\Delta^{\cdot}\Box A$	le transizioni sono funzioni parziali
2) $\Diamond\exists\xi A\vdash\exists\xi\Diamond A$ $\forall\xi\Box A\vdash\Box\forall\xi A$ $\exists\xi\Box A\vdash\Box\exists\xi A$ $\Diamond\forall\xi A\vdash\forall\xi\Diamond A$	le transizioni sono relazioni totalmente definite

$\|\Diamond B\|_x\vdash\Diamond\|B\|_x$ $\Box\|B\|_x\vdash\|\Box B\|_x$	
1)+2)	prefasci
3) gli assiomi duali di 1)	le transizioni sono relazioni la cui conversa è una funzione parziale
4) gli assiomi duali di 2)	le transizioni sono relazioni la cui conversa è totalmente definita
1)+2)+3)	prefasci con transizioni iniettive
1)+2)+4)	prefasci con transizioni suriettive
1)+2)+3)+4)	prefasci con transizioni bijettive

(Con $|-|_x$ e con $\Delta^{\cdot}$ si sono indicate rispettivamente le immagini inverse (sostituzioni) lungo proiezioni e diagonali.)

<u>Osservazioni</u>:

1) Per ognuno di questi casi si dispone di un teorema di completezza: per maggiori dettagli si veda S.Ghilardi-G.C.Meloni "Modal and tense predicate logic: presheaf models and categorical conceptualization" in corso di stampa nei "Proceedings of the summer meeting on category theory and its applications, Louvain-la-neuve 87".
La dimostrazione richiede una tecnica alternativa alla tecnica Henkin: quest'ultima è inadeguata perchè vi sono formule non valide semanticamente e provabili in ogni teoria Henkin.

2) La semantica illustrata permette le seguenti generalizzazioni con semplici modifiche:

2.1) per trattare teorie non di tipo S4 basta rimpiazzare C con un grafo; i risultati illustrati valgono anche qualora fra due mondi accessibili si richieda la presenza di al più un collegamento (così ci si riconduce agli usuali modelli della semantica kripkiana);

2.2) i termini non rigidi possono essere trattati lasciando cadere per essi anche la condizione (SC);

2.3) i termini parzialmente denotanti possono essere trattati passando a linguaggi a più sorte, come frecce definite su sottoggetti (per esempio dell'oggetto terminale per le costanti).

3) Si osserva una situazione analoga anche per la logica "cointuizionista", munita cioè di un operatore di differenza; la commutatività di tale operatore con le sostituzioni equivale alla forma generalizzata dell'assioma di Grzegorczyk dei domini costanti: $\forall_f(f^{\cdot}A \vee B) \leftrightarrow (A \vee \forall_f B)$.

§2_ In S.Ghilardi-G.C.Meloni "Semantic analysis of first order distributive linear logic" (in corso di stampa sullo stesso volume citato sopra) viene introdotta una "logica tensoriale" che ha la possibilità di definire al suo interno e in più modi gli operatori modali e temporali di cui al paragrafo precedente. Tale logica, in cui sono interpretabili i connettivi della logica lineare di Girard, ha come scopo di trattare unitamente alla logica classica operatori per cui non valgono le regole strutturali. Essa ha come primitivi una famiglia $\{\otimes_n\}_{n \geq 0}$ di connettivi n-ari insieme con i loro aggiunti destri $\{\rightarrow{}^{n}_{i}\leftarrow\}$, ossia valgono le seguenti regole:

$$\frac{A_1 \otimes \ldots \otimes A_i \otimes \ldots \otimes A_n \vdash B}{A_i \vdash (A_1 \ldots A_{i-1} \rightarrow B \leftarrow A_{i+1} \ldots A_n)} \quad \text{sse} \quad .$$

L'associatività viene indebolita in modo naturale nella seguente condizione di "eliminazione delle parentesi":

$$(A_{11} \otimes \ldots \otimes A_{1k_1}) \otimes \ldots \otimes (A_{n1} \otimes \ldots \otimes A_{nk_n}) \vdash A_{11} \otimes \ldots \otimes A_{nk_n} \ .$$

(E' possibile considerare estensioni in cui vale anche la conversa, ossia la legge di introduzione delle parentesi.) Analogamente il tensore unario non è l'identità, ma un operatore modale di possibilità riflessivo (e transitivo in forza della condizione precedente). Per le sostituzioni si introduce l'assioma di semicommutatività:

$$f^{\cdot}A_1 \otimes \ldots \otimes f^{\cdot}A_n \vdash f^{\cdot}(A_1 \otimes \ldots \otimes A_n) \ .$$

La semantica è individuata nel modo seguente: si fissa una multicategoria $\mathbb{M}$ e si considerano i multifuntori da $\mathbb{M}$ in Rel, dove Rel è la multicategoria degli insiemi e delle relazioni. $\mathrm{Rel}^{\mathbb{M}}$ è a sua volta una categoria (con limiti sinistri) se si prendono come frecce $f: X \longrightarrow Y$ le famiglie di funzioni insiemistiche $\{f_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{Obj}(\mathbb{M})}$ tali che per ogni multifreccia di $\mathbb{M}$ $i: \alpha_1 \ldots \alpha_n \longrightarrow \alpha$:

$$\langle a_1, \ldots, a_n, a\rangle \in X_i \Rightarrow \langle f_{\alpha_1}(a_1), \ldots, f_{\alpha_n}(a_n), f_\alpha(a)\rangle \in Y_i .$$

Si interpretano quindi i tipi del linguaggio come oggetti di $\mathrm{Rel}^{\mathbb{M}}$, i termini come frecce di $\mathrm{Rel}^{\mathbb{M}}$ e le formule come attributi, nel senso del paragrafo precedente. Le operazioni semantiche corrispondenti a $\{\otimes_n\}$ e $\{\rightarrow{}^{n}_{i}\leftarrow\}$ sono date dalle definizioni seguenti:

$(A_1 \otimes \ldots \otimes A_n)_\alpha = \{a \mid$ esistono $i: \alpha_1 \ldots \alpha_n \longrightarrow \alpha$, $a_1, \ldots, a_n$ tali che $\langle a_1, \ldots, a_n, a\rangle \in X_i$ e $a_k \in (A_k)_{\alpha_k}$ $(1 \leq k \leq n)\}$;

$(A_1 \ldots A_{i-1} \rightarrow B \leftarrow A_{i+1} \ldots A_n)_\alpha = \{a \mid$ per ogni $j: \alpha_1 \ldots \alpha_{i-1}\alpha\alpha_{i+1} \ldots \alpha_n \longrightarrow \beta$, per ogni $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots a_n, b,$

se $\langle a_1,\dots,a_{i-1},a,a_{i+1},\dots,a_n,b\rangle \in X_j$ e $a_1 \in (A_1)_{\alpha_1},\dots,a_{i-1} \in$
$\in (A_{i-1})_{\alpha_{i-1}}, a_{i+1} \in (A_{i+1})_{\alpha_{i+1}},\dots,a_n \in (A_n)_{\alpha_n}$, allora $b \in B_\beta\}$.

Il teorema di completezza si dimostra riducendo il problema al caso proposizionale mediante l'uso dei tipi (nel senso della teoria dei modelli).

Per maggiori dettagli si rinvia agli articoli citati.