Estratto da

A. Zanardo (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Volume 4, Siena 27-30 maggio 1987.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it



# FONDAMENTI DELLA MATEMATICA E FILOSOFIA (DELLA MATEMATICA)

CORRADO MANGIONE
Università di Milano

0. Come credo sia usuale in questi incontri senesi, ho qui il compito di introdurre un dibattito più che di tenere una vera e propria relazione. Credo che manterrò una linea mediana nel senso che, dato l'interesse del tema, e vista la notevole mole di materiale cui è possibile rifarsi, accennerò ad alcuni argomenti, invitando alla lettura dei testi corrispondenti, mentre mi tratterrò più a lungo su altri, concludendo con qualche mia riflessione. (In queste note, scritte naturalmente dopo che la discussione ha avuto luogo, mi riferirò anche a un paio di argomenti che da essa sono emersi). Premetto comunque che un'ampia e informata presentazione di molti degli argomenti che toccherò e degli autori cui mi riferirò è contenuta in Lolli (18). Peraltro riporterò in bibliografia anche articoli collegati in senso lato al problema, pur se non li citerò direttamente.

1. Il tema dunque è: fondamenti della matematica e filosofia della matematica; e si da abbastanza per scontato, oggi, che queste due componenti siano fra loro diverse e sostanzialmente disgiunte. Non desidero -almeno per ora- asserire in modo convinto questa disgiunzione o darne una valutazione, positiva o negativa che sia: prendo atto della circostanza che da un lato si ritiene di poter individuare all'interno della matematica un settore specifico di ricerca, più o meno accettato dai matematici "hard" o tradizionali, che con procedimenti e metodi esclusivamente matematici indaga un non meglio definito campo dei fondamenti ottenendo risultati matematici, cioè teoremi; d'altro lato è individuato, da sempre e sempre a grandi linee, un campo assai vasto, dai contorni non ben definiti, di riflessioni filosofiche sulla matematica con categorie concettuali non (necessariamente) matematiche e che risponde a domande generali sulla natura della matematica e su tutta un'altra serie di questioni connesse, sempre relative a questa branca del sapere, ma che di solito non interessano in modo particolare la maggioranza dei matema-

tici, nel senso che apparentemente almeno non interagiscono direttamente col loro lavoro di ricerca. E la distinzione si è ancora più accentuata in questi ultimi anni, visto che da parte di matematici non certo "sospetti" (vedi ad esempio Mac Lane (22)) si chiede esplicitamente di "incoraggiare un rinnovato studio della filosofia della matematica".

2 Stabilito questo, comincerei col dire che poco più di un secolo fa, quando cioè l'espressione stessa "fondamenti della matematica" venne esplicitamente coniata e ricevette l'accezione fino a qualche decennio fa mai posta in questione, e si affiancò a quella antica (la si fa risalire almeno a Platone, se non a Pitagora) di "filosofia della matematica", le due espressioni erano sinonime, i loro contenuti cioè coincidevano. Frege avanzò la sua idea di risolvere il problema dei fondamenti della matematica nel contesto di un pressante e preciso programma filosofico: chiarire la natura dei concetti e dei principi aritmetici. Non era cioè un puro atto di cortesia l'aspirazione e l'invito di Frege a che la questione venisse affrontata in collaborazione da filosofi e matematici: era necessario, per risolvere un tipico problema di filosofia della matematica, che due modi di pensare che ricorrevano a categorie concettuali diverse, quali sono in generale quelle filosofiche e quelle matematiche, realizzassero una feconda convergenza operativa. Il rapporto fra filosofia e matematica veniva visto quindi non in modo rapsodico e superficiale, ma come un intreccio profondo che del resto tutta l'opera di Frege testimonia ancor oggi, indipendentemente dal fatto che il suo programma logicista sia o meno riuscito. D'altra parte, le procedure con cui realizzare questo programma erano certamente "matematiche" in senso lato anzi, proprio questo è uno dei meriti maggiori di Frege e cioè quello di aver dato forma "esatta", oltre che potenziata rispetto alla logica tradizionale, a quella "grande logica" che risulterà alla fine essere contraddittoria.
Questo, e proprio all'origine, è un, se non il, motivo per cui la logica, i fondamenti e/o la filosofia della matematica conservano ancora, agli occhi di qualche interprete, legami che sono dati solo storicamente. Si veda ad esempio Tymoczko (33) quando dice che i matematici "sono abituati a pensare alla filosofia della matematica al più come una branca della logica matematica o degli studi sui fondamenti"; aggiungendo, bontà sua, che "dopo tutto, la filosofia della matematica tratta usualmente con concetti quali quelli di numero o di insieme, funzioni ricorsive, sistemi formali, modelli, e simili: orbene, dov'è qui il posto per i matematici?" Non prendete la cosa per ridicola: il fatto è che Tymoczko vuole arrivare a concludere che il concetto di "matematici" inteso come "comunità" deve essere oggetto specifico di una peraltro non meglio identificata filosofia della matematica. Ma andiamo con ordine.



Filosofia e fondamenti della matematica restano fuse ( ma talora a mio parere confuse) almeno fino a Gödel. Nominiamo, come d'obbligo, Russell che prosegue più in generale il disegno di Frege in senso abbastanza armonico, e ricordiamo pure -per dovere di cronaca- i neopositivisti con la loro visione peraltro totalmente strumentale della logica. Il fenomeno che più ci interessa è però questo: ben presto i matematici cominciarono col reclamare la loro esclusiva pertinenza circa il problema dei fondamenti. E' qui che inizia la vera separazione con la filosofia della matematica. Ci basterà ricordare Hilbert, esempio preclaro di "arroganza" matematica, quando ammoniva i fisici che la fisica era una scienza troppo importante e delicata per lasciarla fare a loro (doveva ovviamente essere sviluppata dai matematici) ma anche gli stessi matematici e neanche tanto implicitamente i filosofi che lo stesso poteva dirsi per i fondamenti della matematica. L'esortazione abituale di Hilbert era proprio: ricordiamoci che siamo dei matematici! e la dimensione per così dire filosofica, per altro innegabile suo malgrado, del problema veniva o relegata nella affermazione che alla base del pensiero matematico stava il riconoscimento dell'esistenza di entità extra-matematiche (empiriche o intuitive che fossero), o sostanzialmente trascurata del tutto (quando ad esempio non considerava debitamente il fatto che il suo stesso modo di affrontare il problema dei fondamenti della matematica aveva un innegabile carattere filosofico di riduzionismo).
Una consapevolezza maggiore dal punto di vista filosofico si potrebbe attribuire a Brouwer, ma è anche vero, come è noto, che egli tende a eliminare il problema in quanto tale, sostenendo appunto che la matematica non ha bisogno di alcun fondamento, salvo l'inserimento in una filosofia (la sua) di carattere assolutamente generale. In altri termini si potrebbe sostenere che "il più filosofo" di tutti coloro che tradizionalmente vediamo lavorare attorno a questo problema, fosse proprio Brouwer: peccato che, in qualche senso, egli non "vedesse" assolutamente il problema.
Arriva Gödel e ottiene (anche nel '30, ma soprattutto nel '31, ovviamente) risultati decisivi di carattere (meta)matematico, ma al contempo di profondo valore filosofico, e questo per due ragioni almeno:

1) per parafrasare Lolli, perchè c'è più filosofia nel teorema di Gödel che nel suo professato realismo;

2) perchè, per quanto detto finora, tali risultati rispondono in modo definito a un problema filosofico, oltre che ovviamente di grande interesse matematico.

Quello che Gödel con i suoi teoremi del '31 fa è sostanzialmente questo: porre fine a una ricerca sui fondamenti di tipo riduzionista (tale era, contro probabilmente ogni intenzione del suo autore, anche la proposta brouweriana); in particolare, la residua parte insiemistica, che dovrà aspettare ancora trent'anni per abbandonare, da un punto di vista generale (filosofico?) questa pretesa, si configura

sempre più come ricerca puramente matematica, che lascia solo sullo sfondo l'aspetto fondazionale, facendo emergere quella divisione di cui parlavo all'inizio.
E' un fatto comunque che dopo Gödel la logica si immerge sempre più nella matematioca e nel contempo diventa sempre più strumento di analisi di una (piccola) parte della filosofia: il processo, da questo lato, sfocerà -anni sessanta- nella cosiddetta "philosophical logic". Ripensando a recenti e non proprio esaltanti discussioni nostrane in merito, debbo dire che io non vedo niente di drammatico in questo fenomeno: è solo un segno che il terziario avanzata ha preso piede, anzi, ante litteram, anche in logica. D'altra parte chi ha mentalità o training filosofici, o più semplicemente, insegna logica (matematica: qui ci vuole) in Facoltà di filosofia ha costantemente di fronte il vecchio problema dello statuto della logica: strumento o parte della filosofia? (i colleghi in genere non sono troppo propensi ad aiutarlo a sdrammatizzare il dilemma).
Ma torniamo al tema. Quando Mac Lane invoca una rinascita della filosofia della matematica, afferma che questo è un campo di ricerca che "dorme dal 1930". I fondamenti, viceversa, non sembra che "dormano" (anche se Mac Lane ne ha poca stima, li trova ridotti a "palude" (23) suscitando le ire e la patetica e noiosa reazione di Drake (6)): anzi essi costituiscono il precipitato stabile del miscuglio filosofia-fondamenti-logica sottoposto alla "reazione" matematica che l'aveva assunto come oggetto di propria competenza. Naturalmente non senza sforzi e strascichi spiacevoli perchè logica, teoria degli insiemi, ecc. che avevano alle spalle un passato così oneroso e "poco chiaro", hanno faticato non poco ad acquistare piena cittadinanza nel mondo matematico, pur avendo negato -un po' meno platealmente che S.Pietro in verità- e ripetutamente, qualsiasi commercio con imprese men che limpide (leggi: filosofiche). Del resto, per una significativa concezione dei rapporti fra logica, fondamenti della matematica e filosofia della matematica si veda ancora Mac Lane (24) che canonizza definitivamente il divorzio, dopo circa mezzo secolo di vita da separati in casa.

3 Naturalmente, quella di Mac Lane è solo una voce, per quanto autorevole. Ritengo però che nel complesso rappresenti effettivamente un modo di pensare diffuso, ma soprattutto testimonia una mancanza di chiarezza circa i contenuti che oggi si chiedono ai fondamenti da un lato e alla filosofia della matematica dall'altro (se non alla stessa logica). Dicevo prima, ad esempio, che con i risultati di Cohen tramonta anche la pretesa teorica (chè praticamente ancor oggi la maggioranza dei matematici non ha problemi in questo senso) della teoria degli insiemi di costituire un fondamento riduzionista per la matematica. E' anche noto tuttavia che, a parte le già ricordate prese di posizione di Drake (6) sui grandi cardinali o ad esempio la



seconda edizione di Hatcher (12), il recente Congresso (l'ottavo per la precisione) Internazionale di logica, metodologia e filosofia della scienza tenuto a Mosca, ha dedicato una sezione, la quarta per l'esattezza, alla set theory, col commento esplicativo che essa "include la teoria assiomatica degli insiemi come fondamento della matematica classica". E' anche vero che dalla fine degli anni sessanta circa sono state avanzate altre proposte su come intendere i "fondamenti" della matematica. Credo si possano brevemente caratterizzare come antiriduzionistiche: non si tratta più di garantire la matematica riducendo, o traducendo o ricostruendo i suoi oggetti e concetti nel contesto di altre teorie ritenute più "sicure" e/o generali (logica, matematica finitaria, intuizione, o altro) bensì di vedere la ricerca dei fondamenti come il reperimento e il riconoscimento di ciò che vi è di universale in matematica, servendosi dunque di teorie che oggi permettano di cogliere e di esprimere tale generalità. Alludo, è chiaro, a quell'ordine di idee espresso da Lawvere e alla teoria delle categorie. Non sembra che questa proposta abbia ottenuto particolare favore (curioso è l'atteggiamento di odio/amore di Mac Lane nei suoi riguardi) e comunque sembra assai soggettivo e estrinseco il preteso legame di tale proposta con una concezione filosofica generale come quella materialistico-dialettica che peraltro Lawvere avanza spesso come contesto generale del proprio tentativo fondazionale.
In definitiva mi sembra che nel complesso ci siano idee molto poco chiare circa il senso da attribuire oggi, if any, all'espressione "fondamenti della matematica". Salvo a non voler seguire l'esortazione di un autore che francamente non ricordo che quanto c'è da fare in questa situazione è soltanto il confrontare le varie proposte e le diverse eventuali accezioni del termine. Non sono ovviamente ancora in grado di dare una valutazione ponderata sulla proposta contenuta in (5).

4 Non meno intricate sono le cose per quanto riguarda la filosofia della matematica. In questi ultimi anni si sono succeduti diversi interventi sullo specifico problema di una discussione filosofica sulla matematica, sicchè il pressante invito di Mac Lane sopra ricordato cade in un ambiente già sensibilizzato in questo senso. Non molto però di quanto è stato scritto è veramente apprezzabile proprio e soprattutto perchè non è sempre ben chiaro cosa debba essere una "filosofia della matematica"; io darò comunque indicazioni di lettura che non tengono direttamente conto delle mie personali valutazioni sugli scritti citati (naturalmente, non mancherò di sbilanciarmi se necessario). Uno dei più vecchi ma anche dei più influenti articoli sull'argomento è certamente Goodman (7) che anch'io, con Lolli, ritengo un'analisi "serena ma conclusiva" sulla possibilità dei tre principali filoni di ricerche sui fondamenti -e cioè logicismo,

intuizionismo, formalismo- di fungere da altrettante "filosofie della matematica". L'articolo di Goodman sanziona così, ma per così dire dall'altra parte, una separazione quanto mai salutare. Egli prende spunto da una frase di M. Kline (14) secondo la quale "la matematica è un corpo di conoscenza. Però non contiene verità" osservando che "concezioni di tale generalità che negano che la matematica abbia un oggettivo contenuto scientifico, sono ampiamente condivise dai matematici e diffuse (disseminated) nelle scuole e in libri di divulgazione (popular) come quelli di Kline. Io credo che tali concezioni siano false e che la loro diffusione non sia positiva per la nostra e l'altrui considerazione della matematica". Introduce quindi la categoria negativa del "superficismo" (surfacism) traendola dall'analogia con un ipotetico fisico che sostenesse che tutte le proprietà delle cose riguardino solo la loro superficie (cioè che gli oggetti non abbiano alcun contenuto, oltre appunto la loro superficie). In forza di un suo principio di oggettività ("qualunque cosa che sia praticamente reale deve essere assunta come oggettivamente tale") mostra quindi come le posizioni suddette non siano buone candidate a fungere da filosofia della matematica, in quanto tutte sono appunto affette da "superficismo".Cosa ancor più interessante Goodman sostiene che anche una concezione platonista (assai diffusa, almeno in termini ingenui, fra i working mathematicians) soffra di superficismo e quindi non sia a sua volta accettabile. Torneremo alla fine sulle conclusioni più generali di questo articolo.
Qualche anno dopo, in (8), Goodman considera anche la proposta bishopiana di una matematica costruttiva (per la quale si può vedere anche (3), (4)) sempre per valutarla da un punto di vista della filosofia della matematica. Anche in questo caso la sua risposta è negativa: si tratta di una grande impresa matematica, ma non di una filosofia della matematica; nel corso della discussione, al solito assai fine e stimolante, Goodman tocca a mio parere un punto nodale quando osserva che "se una linea va tracciata fra esistenza effettiva e esistenza puramente ideale matematica, questa linea va situata non fra finito e infinito, come sostiene Bishop, bensì tra fattibile (feasible) e non fattibile (infeasible)".
Nello stesso numero della American Mathematical Monthly (che continuerà ad ospitare assai spesso articoli di indole "filosofica" pur se di vario livello) di seguito all'articolo di Goodman si trova Snapper (31) che viceversa è preoccupato di chiarire quali siano i rapporti fra "definizione matematica" e "analisi filosofica". Non c'è paragone col contributo precedente, ma al di là del giudizio negativo di Lolli (18) che "vi venga propagandata l'idea che nelle costruzioni matematiche si parta da un dominio primario di verità per approssimarlo con quello dei teoremi", credo valga la pena di leggerlo, come minimo per avere il polso della discussione in quegli anni (1979). Non particolarmente esaltante neppure l'argomentazione di Halmos (9) (e si



veda anche (10)) circa il quesito "qual è il cuore della matematica" ("di che cosa consiste realmente la matematica") cui candidamente risponde: i problemi, nel numero di agosto-settembre; decisamente buono è invece l'intervento di Hamming (11) che argomenta, richiamandosi a un noto lavoro di Wigner, sulla questione del perchè l'applicazione della matematica abbia successo: la sua risposta, in sintesi, è che troviamo esattamente ciò che cerchiamo ("se mettiamo gli occhiali blu vediamo blu"); pure notevole la risposta di Swart (32) nel numero di novembre a un articolo di Tymoczko sulle implicazioni filosofiche della dimostrazione computer-assisted del teorema dei quattro colori. La funzione del concetto di dimostrazione in matematica è certamente il punto centrale della posizione di Lolli, che si può vedere come una proposta di filosofia della matematica in chiave storica (19), (20). Dove viceversa, a dispetto del titolo, la filosofia si tramuta ben presto e stabilmente in storia è in (1); sull'importanza della storia e della filosofia della matematica in sede didattica si veda (21).
Riprendiamo un attimo Mac Lane (22). Dopo aver lanciato il suo appello per una rinascita degli studi di filosofia della matematica, Mac Lane ricorda con apprezzamento Goodman (7) mentre afferma che "altre recenti pubblicazioni in filosofia della matematica da Putnam (28) a Quine (29) a Wang (34) mostrano scarse nuove intuizioni e nessuna nuova ispirazione dalla matematica". Cerca quindi di delineare una filososfia della matematica "migliore", ma la sua proposta di una serie di modelli che rifletterebbero l'attuale stato della matematica è deludente per almeno due motivi: da un lato essi sono ottenuti con una specie di ricostruzione genetica della matematica stessa, dall'altra per la richiesta avanzata dall'autore di un "rigore assoluto" del tutto astorico. Il genuino problema filosofico dell'applicabilità della matematica (si ricordi Hamming) è demandato poi alla "metafisica" (sic!). La filosofia della matematica deve essere a suo parere "più orientata verso la comprensione della natura della matematica che non a una 'fondazione' della stessa". Quest'ultima ha portato alle posizioni dogmatiche della "Grand Set Theoritic Foundation" che egli non accetta perchè da un lato "non descrive adeguatamente le strutture matematiche rilevanti" dall'altro è invece "irrilevante per la pratica della maggior parte della matematica" (oltre ad avere altri "svantaggi tecnici": teorema di Gödel, teoria delle categorie e, abbastanza paradossale nel contesto del suo discorso, quello della non applicabilità). Egli pensa che al rigore assoluto della teoria degli insiemi occorra affiancare tre idee, quelle di ampiezza, profondità, chiarezza, cui peraltro dedica solo poche righe di illustrazione, alla fine dell'articolo, concludendo che "a causa della profondità e della distanza dell'immediato oggetto, la trattazione matematica deve non solo essere rigorosa ma anche fornita di chiarezza concettuale".

Mac Lane prosegue a più riprese in questa sua valutazione generale (è alquanto dubbio se chiamarla filosofica) della matematica. In (23) si chiede come essa stia in salute: bene e male risponde. Bene perchè alcuni grossi problemi sono stati risolti, male perchè si scrive troppo -e troppo poco- perchè ci si perde in generalizzazioni fasulle e perchè la specializzazione è arrivata al punto di trasformarsi praticamente in incomunicabilità: "nei tempi passati c'erano almeno alcuni matematici che avevano una visione generale dell'intera materia; richiesti di descrivere le prospettive di futuri progressi, essi non si limitavano a quelle del proprio lavoro. Oggi sembra che ci sia ben poca gente capace di visioni panoramiche. Ciò può essere causato dal fatto che noi premiamo gli specialisti e non le persone con visioni d'insieme", concludendo un po' mestamente che "il progresso matematico si deve misurare sulla comprensione di nuove idee e non sul numero di pubblicazioni".

5 Il panorama, nel complesso, non è quindi particolarmente allettante. Anche qui, come nel caso dei fondamenti, forse non si sa bene cosa si cerca, considerato d'altra parte che mentre una "adeguata" filosofia della matematica potrebbe fungere da fondamento alla stessa mi sembra francamente improponibile, oggi come oggi, l'implicazione inversa. Tempo addietro (25) mi era sembrata provocatoria, non giustificata e viziata di soggettivismo la domanda che Kreisel si poneva in (16) circa l'esistenza o meno di una filosofia della matematica come disciplina autonoma (con relativa risposta negativa); oggi sarei molto meno sicuro delle mie obiezioni di allora e molto meno convinto delle possibilità offerte in questo senso, ad esempio dalla proposta globale di Lawvere (vedi (26)). Debbo confessare che un discorso tipico di filosofia della matematica che mi sia mai capitato di incontrare resta ancora per me quello di Lautman (17); tipico nel senso che non si tratta solo di una riflessione sulla matematica (chè altrimenti quasi tutti, allora, saremmo una volta o l'altra filosofi della matematica, più o meno "bravi") bensì della applicazione di categorie filosofiche alla matematica vista nel suo effettivo stato presente e nel suo sviluppo. E tale resta, il discorso di Lautman, indipendentemente dal valore esplicativo che gli si può (oggi almeno) annettere.

Abbiamo toccato qui un punto forse interessante: fare filosofia della matematica non può significare solo "riflettere" sulla matematica, ma deve anche comportare l'impiego di categorie genuinamente filosofiche, non importa che siano o meno tradizionali. In altri termini credo che una filosofia della matematica debba essere per così dire "giudicata" anche dai filosofi. Mi si dice che c'è scarsa propensione a far questo, ad accettare questo confronto, perchè c'è troppo "ciarpame" in filosofia. E' fin troppo facile per me rispondere che di ciarpame ce n'è in abbondanza anche in matematica. Non vorrei ricordare parabole di pagliuzze e travi



Se i "modi" di far filosofia della matematica hanno da essere del tipo sopra delineato, si possono indicare anche degli argomenti irrinunciabili, prioritari o comunque interessanti? Credo di sì ed elenco, come dire, di getto:

1) problema della applicabilità (si ricordi Hamming. Perchè e come la matematica si applica al mondo?)

2) cos'è una dimostrazione matematica?

3) problema della naturalezza (cosa vuole dire che una analisi o una concettualizzazione matematica è "naturale" o peggio ancora "più naturale di altre"? Per chi? Rispetto a cosa?)

4) Cos'è la pratica matematica?

5) Come si fa a distinguere, e che cosa vuole dire distinguere, fra "effettivo" e "effettivo in linea di principio"? (si ricordi Goodman)

6) Eccetera.

Finisco con "eccetera" non perchè ritenga di avere esaurito i problemi proponibili a una filosofia della matematica ma proprio perchè ritengo ce ne siano di molti, diversi e importanti oltre a quelli da me citati.

6 Dopo aver argomentato per dimostrare che anche il platonismo è una forma di superficismo, Goodman concludeva con queste parole il suo più volte citato (7): "E' una realtà pratica che i nostri migliori teoremi danno informazioni sul mondo concreto. E' una realtà pratica che non esiste un confine netto fra matematica pura e applicata. Esiste solo una scienza. Ne segue, dal principio di oggettività, che un'adeguata filosofia della matematica dovrebbe identificare il contenuto oggettivo di questi fatti. Una tale filosofia della matematica sarebbe solo un capitolo di una più ampia filosofia della scienza, che dovrebbe rendere chiaro in che senso esiste un solo mondo oggettivo e come avviene che gli oggetti studiati dal matematico, parecchi dei quali non sono realizzati nella realtà fisica, possono non di meno essere visti come parte di quel mondo. Purtroppo quella filosofia deve ancora essere formulata".

Riprendendo tuttavia quanto sopra accennavo a proposito di Kreisel, resto profondamente incerto sul fatto se esista o debba esistere una filosofia della matematica, con sue proprie caratteristiche e peculiarità e cultori. Esprimo solo un dubbio, non faccio un'affermazione convinta. Credo sarebbe quanto mai proficuo che fra noi si stabilisse una più abituale dimestichezza con la discussione di questi problemi.

BIBLIOGRAFIA

(1) Barabashev, Alexei G. The Philosophy of Mathematics in U.S.S.R., in "Philosophia Mathematica" (Phil. Math.), II, vol.I, 1986, pagg.15-32

(2) Bonsall, F.F. A down-to-earth view of Mathematics, in "The American Mathematical Monthly" (A.M.M.), 89, 1982, pagg.8-15

(3) Bridges, Douglas
Mines, Ray What is constructive Mathematics?, in "The Mathematical Intelligencer" (M.I.), vol.VI, n.4, 1984, pagg.33-39

(4) Calder, Allan La matematica costruttiva, in "Le Scienze", Quaderni, n.18, 1984, pagg.80-87

(5) Clavell, M.
De Giorgi, E.
Forti, M.
Tortorelli, V.M. A self-reference oriented theory for the Foundation of Mathematics, Università degli Studi di Pisa, Dipartimento di Matematica, maggio 1987, n.194

(6) Drake, F.R. How recent work in Mathematical Logic relates to the Foundations of Mathematics, in "M.I.", vol.VII, n.4, 1985, pagg.27-35

(7) Goodman, Nicolas D. Mathematics as an abjective Science, in "A.M.M.", 86, 1979, pagg.540-551

(8)--------, Reflections on Bishop's Philosophy of Mathematics, in "M.I.", vol.V, n.3, 1983, pagg.61-68

(9) Halmos, P.R. The heart of Mathematics, in "A.M.M.", 87, 1980, pagg.619-524

(10) ------ Applied Mathematics is bad mathematics, in L.A.Steen (ed.), "Mathematics Tomorrow", Springer, 1981, pagg.9-20

(11) Hamming, R.W. The unresonable effectiveness of Mathematics, in "A.M.M.", 87, 1980, pagg.81-90

(12) Hatcher, William S. The logical Foundations of Mathematics, Pergamon Press, 1982

(13) Hermann, Robert Mathematics and Bourbaki, in "M.I.", vol.VIII, n.1, 1986, pagg.32-33



(14) Kline, Morris Mathematics in Western Culture, Oxford University Press, 1953, trad. it., Feltrinelli, 1976

(15) Knuth, Donald E. Algorithmic Thinking and Mathematical Thinking, in "A.M.M.", 92, 1985, pagg. 170-181

(16) Kreisel, Georg Perspectives in the Philosophy of pure Mathematics, in P.Suppes, L.Henkin, G.R.C.Moisil, A.Joja (eds.), "Logic, Methodology and Philosophy of science", IV, North Holland, 1973, pagg.255-277

(17) Lautman, Albert Essai sur l'unité des mathématiques et divers écrits, Paris, 1977

(18) Lolli, Gabriele La dimostrazione in matematica: analisi di un dibattito, in Bollettino U.M.I. (6) 1-A (1982), pagg.197-216

(19) ------ Le ragioni fisiche e le dimostrazioni matematiche, Il Mulino, Bologna, 1985

(20) ----- La macchina e le dimostrazioni (matematica, logica e informatica), Il Mulino, Bologna, 1987

(21) Long, Robert Remarks on the History and Philosophy of Mathematics, in "A.M.M.", 93, 1986, pagg.609-619

(22) Mac Lane, Saunders Mathematical Models: a sketch for the Philosophy of Mathematics, in "A.M.M.", 88, 1981, pagg.462-472

(23) ------- The health of Mathematics, in "M.I.", vol.V, n.4, 1983, pagg.53-55

(24) ------- Mathematical Logic is neither Foundation nor Philosophy, in "Phil. Math.", II, vol.I, 1986, pagg.3-13

(25) Mangione, Corrado Le "Begriffsschrift" de Frege (1879) acte de maissance de la philosophie des mathématiques moderne, in "Epistemologia", IV, 1981, pagg.25-52

(26) ------------ Matematica e Logica, in "Atti del Convegno 'Tradizione e crisi dei valori'", Accademia Nazionale dei Lincei, Roma, 1984, pagg.231-248

(27) Mc Cleary, John
Mc Kinney, Andrey What Mathematics isn't, in "M.I.", vol.VIII, n.3, 1986, pagg.51-53

(28) Putnam, Hilary Philosophy of Mathematics, in Peter Asquith e Henry E. Kyburg Jr. (eds.) "Current Research in the Philosophy of Science", Philosophy of Science Association, East Lansing, Michigan, 1979, pagg.386-398

(29) Quine, W.V.O. Ontological Relativity and Other essays, Columbia University Press, New York, 1969

(30) Smorynski, Craig Mathematics as a cultural system, in "M.I.", vol.V, n.1, 1983, pagg.9-15

(31) Snapper, Ernst What is mathematics?, in "A.M.M.", 86, 1979, pagg.551-557

(32) Swart, E.R. The Philosophical implications of the four-color problem, in "A.M.M.", 87, 1980, pagg.697-707

(33) Tymoczko, Thomas Making room for Mathematicians in the Philosophy of Mathematics, in "M.I.", vol.VIII, n.3, 1986, pagg.44-50

(34) Wang, Hao From Mathematics to Philosophy, London, 1971, Trad.it. , Boringhieri, Torino, 1974.