Estratto da

A. Zanardo (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Volume 4, Siena 27-30 maggio 1987.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

FONDATEZZA SEMANTICA CLASSICA E INTUIZIONISTICA

ENRICO MARTINO
Seminario Matematico - Università di Padova

0. Introduzione

La nozione di verità classica ha come controparte intuizionista una nozione di provabilità informale. Questa fonda il significato intuizionistico delle costanti logiche come quella ne fonda il significato classico.

Con riferimento ad un linguaggio del 1° ordine, il significato classico delle costanti logiche è espresso dalle clausole tarskiane che determinano le <u>condizioni di verità</u> di un enunciato complesso in funzione di quelle degli enunciati componenti. Parimenti, il significato intuizionistico delle costanti logiche è espresso dalle clausole di Heyting che determinano le <u>condizioni di provabilità</u> (informale) di un enunciato complesso in funzione di quelle degli enunciati componenti.

Il predicato di provabilità informale intuizionista T, che nel seguito chiameremo predicato di <u>verità intuizionista</u>, presenta problemi del tutto analoghi a quello di verità classica.

In particolare, anche intuizionisticamente sembra attendibile il bicondizionale tarskiano $\varphi \leftrightarrow T\ulcorner\varphi\urcorner$, esprimente che una prova della provabilità di φ equivale ad una prova di φ. Ne viene, anche intuizionisticamente, l'inesprimibilità di T nel linguaggio oggetto (di una teoria abbastanza potente), essendo enunciati del tipo

$$(1) \qquad \chi = \neg T \ulcorner \chi \urcorner$$

incompatibili col bicondizionale tarskiano.

χ non è altro che l'enunciato del mentitore, intuizionisticamente inteso come un enunciato la cui provabilità equivale alla provabilità della sua improvabilità.

La nozione di <u>fondatezza semantica</u>, introdotta da Kripke nel suo saggio sulla Verità del 1975, costituisce, a nostro avviso, uno degli approcci più illuminanti allo studio dei paradossi semantici.

Intuitivamente, un enunciato φ è <u>fondato</u> se le sue condizioni di verità sono ben definite a partire da quelle degli enunciati di base (cioè atomici e privi di T), in virtù delle clausole tarskiane relative ai connettivi e quantificatori e di un'ulteriore clausola relativa a T. Quest'ultima, suggerita dal bicondizionale tarskiano, definisce le condizioni di verità di $T\ulcorner\varphi\urcorner$ identificandole con quelle, supposte già definite, di φ.

Enunciati quali il mentitore χ risultano allora infondati, essendo le condizioni di verità di χ definite in termini di quelle di $T\ulcorner\chi\urcorner$ e queste, a loro volta, in termini di quelle di χ.

La fondatezza semantica spiega così le ragioni dell'inesprimibilità di T e permette inoltre di isolare

in modo naturale una classe di enunciati, quelli fondati, ristretto ai quali il predicato di verità risulta definibile nel linguaggio oggetto.

Nell'originale di Kripke, come anche nella letteratura successiva, la fondatezza semantica è trattata soltanto in ambito classico. Riteniamo peraltro che essa possa essere di notevole interesse anche dal punto di vista intuizionista. L'analogia sopra notata tra il predicato di verità classico e quello intuizionista suggerisce infatti una soluzione del mentitore intuizionista in termini di definitezza delle condizioni di provabilità e la conseguente esprimibilità del predicato di verità intuizionista ristretto agli enunciati fondati, cioè a quelli le cui condizioni di provabilità sono ben definite.

Nel seguito schizzeremo una trattazione della fondatezza semantica simultaneamente classica ed intuizionista, nel senso seguente.

Ci riferiremo ad un <u>modello di base</u> M_o di una teoria $\mathcal{T}_o$ relativa ad un linguaggio del 1° ordine L_o, in cui tutti i connettivi e quantificatori sono assunti come primitivi. Supporremo L_o dotato di costanti individuali per tutti gli elementi del dominio D di M. Posto $L = L_o \cup \{T\}$, con T nuovo predicato unario, supporremo che $\mathcal{T}_o$ sia in grado di esprimere la sintassi di L. Estenderemo M_o ad una struttura M relativa ad L, in cui T sarà interpretato come predicato di <u>verità fondata</u>. Infine aggiungeremo a $\mathcal{T}_o$ un'assiomatizzazione per T, ottenendo così una teoria $\mathcal{T}$, conservativa su $\mathcal{T}_o$, di cui M sarà il "modello inteso".

Ebbene, M e $\mathcal{T}$ saranno classici o intuizionisti secondoché tali siano M_o e $\mathcal{T}_o$ e secondoché classicamente o intuizionisticamente sia inteso il metalinguaggio.

Classicamente, il nostro predicato di verità fondata risulterà equivalente a quello di Kripke, relativo allo schema di valutazione debole di Kleene.

1. Costruzione del modello M

Relativamente al modello M , definiamo induttivamente gli enunciati fondati di L e le relative condizioni di verità (da intendersi, nel caso intuizionista, come condizioni di provabilità).

1.1 (i) Se φ è un enunciato atomico di L_o, φ è fondato. φ è vero se $M_o \models \varphi$.

(ii) Se φ e ψ sono fondati e $\circ$ è un connettivo binario, tale è $\varphi \circ \psi$. Le condizioni di verità di $\varphi \circ \psi$ si definiscono nel modo usuale in funzione di quelle di φ e ψ.
(Consideriamo qui conglobata anche la negazione, ponendo $\neg\varphi := \varphi \rightarrow \perp$).

(iii) Se $\varphi(x)$ è una formula con la sola variabile libera x e, per ogni $d \in D$, $\varphi(d)$ è fondato, allora tali sono anche $\forall x\, \varphi(x)$ e $\exists x\, \varphi(x)$. $\forall x\, \varphi(x)$ $[\exists x\, \varphi(x)]$ è vero se, per ogni [per qualche] $d \in D$, $\varphi(d)$ è vero.

(iv) Se φ è fondato, tale è anche $T\ulcorner\varphi\urcorner$. Questo è vero se φ è vero.

Estendiamo ora M_o al modello M di L ottenuto interpretando gli enunciati atomici del tipo $T\ulcorner\varphi\urcorner$ come segue:

1.2 $M \models T\ulcorner\varphi\urcorner$ se φ è fondato e, in caso affermativo, se è vero (brevemente, se φ è fondatamente vero).

Le seguenti proposizioni sono di immediata verifica:

1.3 Per ogni enunciato φ di L_o, $M_o \models \varphi \Leftrightarrow M \models \varphi$.

1.4 φ è fondato se, e solo se, $M \models T\ulcorner\varphi \rightarrow \varphi\urcorner$.

1.5 Se φ è fondato, $M \models \varphi \leftrightarrow T\ulcorner\varphi\urcorner$.

Giova osservare come il modello M risolva anche il cosiddetto paradosso del mentitore rafforzato. Precisamente, l'idea della fondatezza costituisce una motivazione per una semantica con lacune: certi enunciati, tra cui il mentitore, sono privi di condizioni di verità e pertanto sono da ritenersi né veri né falsi.

Le semantiche con lacune sono però soggette alla seguente obiezione: se il mentitore $\chi = \neg T\ulcorner\chi\urcorner$ non è né vero né falso, esso è, in particolare, non vero, quindi $\neg T\ulcorner\chi\urcorner$ è vero, cioé χ è vero.

Il modello M permette di conciliare entrambe le intuizioni, contro e a favore della verità di χ, distinguendo due predicati di verità. χ, in quanto infondato, non è vero rispetto al predicato T; ma, proprio perché infondato, $M \models \neg T\ulcorner\chi\urcorner$ e quindi $M \models \chi$, cioè χ è vero rispetto al predicato metalinguistico di verità in M. Rispetto a questo, tutti gli enunciati di L hanno condizioni di verità ben definite. La definizione di queste è infatti posteriore alla definizione induttiva degli enunciati fondati e delle relative condizioni di verità. A tale stadio sono dunque certamente lecite (cioè non circolari) definizioni che presuppongano quelle nozioni. E' pertanto legittima la definizione del modello M, dove la clausola cruciale 1.2 definisce nuove condizioni di verità presupponendo quelle della definizione 1.1. In termini di condizioni di verità, la 1.2 può essere più esplicitamente così riformulata:

1.6 $T\ulcorner\varphi\urcorner$ è vero' se φ è fondatamente vero.

Questa, unitamente all'altra clausola iniziale che identifica <u>vero</u>' con <u>vero</u> per gli enunciati atomici di L, definisce (in virtù delle solite clausole sui connettivi e quantificatori) il predicato metalinguistico <u>vero</u>' su tutti gli enunciati di L. 1.5 dice allora che T è la restrizione di <u>vero</u>' agli enunciati fondati.

2. Assiomatizzazione di T

In accordo con 1.4, esprimeremo in L il predicato G di fondatezza semantica ponendo $G\ulcorner\varphi\urcorner := T\ulcorner\varphi\to\varphi\urcorner$.

Il modello M suggerisce per T la seguente assiomatizzazione:

2.1 (a) $G\ulcorner\varphi\urcorner$, per ogni formula atomica φ di L_o.

(b) $G\ulcorner\varphi\circ\psi\urcorner\leftrightarrow G\ulcorner\varphi\urcorner\wedge\ G\ulcorner\psi\urcorner$,per ogni connettivo $\circ$.

(c) $G\ulcorner Qx\,\varphi x\urcorner\leftrightarrow\forall x\ G\,\widehat{\varphi x}$, per ogni quantificatore Q, dove $\widehat{\varphi x}$ è il termine tale che, per ogni $d\in D$, $\widehat{\varphi d}=\ulcorner\varphi d\urcorner$.

(d) $G\ulcorner T\ulcorner\varphi\urcorner\urcorner\leftrightarrow G\ulcorner\varphi\urcorner$.

(e) $T\ulcorner\varphi\urcorner\to G\ulcorner\varphi\urcorner$.

(f) $G\ulcorner\varphi\urcorner\to(\varphi\leftrightarrow T\ulcorner\varphi\urcorner)$.

Chiameremo $\mathcal{T}$ la teoria ottenuta da $\mathcal{T}_o$ con l'aggiunta degli assiomi 2.1.

2.2 <u>Teorema</u> $\mathcal{T}$ è conservativa su $\mathcal{T}_o$.

Classicamente il teorema segue subito dall'estendibilità (di cui alla sezione precedente) di ogni modello di $\mathcal{T}_o$ ad un modello di $\mathcal{T}$ e dal teorema di completezza semantica. Intuizionisticamente la dimostrazione è più complicata, non valendo in generale la completezza semantica. Può comunque ottenersi (come mostreremo altrove) facendo uso dei modelli di Beth generalizzati.

Mediante i modelli di Beth è anche possibile trattare la fondatezza semantica intuizionista in una metateoria classica.

3. L'operatore intensionale di Aczel-Feferman

Nel 1980 Aczel e Feferman hanno proposto una teoria intensionale degli insiemi per cui vale il principio di comprensione nella forma

3.1 $y\in\{x\mid\varphi x\}\equiv\varphi y$,

dove $\equiv$ è un certo operatore di "equivalenza intensionale" , introdotto ed assiomatizzato dagli autori. Questi propongono di leggere $\varphi\equiv\psi$ come "φ e ψ sono equivalenti in conseguenza di date definizioni di base" (v. anche Feferman 1984).

L'operatore $\equiv$ è interpretabile, mediante il nostro predicato T di verità fondata, come segue:

$$\varphi\equiv\psi\ :=(\ G\ulcorner\varphi\urcorner\leftrightarrow G\ulcorner\psi\urcorner\ )\wedge\ (\ G\ulcorner\varphi\urcorner\to\ (\varphi\leftrightarrow\psi))\ .$$

Sia $S(x,y)$ il termine tale che, se $d\in D$, u è una variabile e φ una formula, risulti $S(d,\ulcorner\langle u,\varphi(u)\rangle\urcorner)=\ulcorner\varphi(d)\urcorner$. Poniamo $\{x\mid\varphi x\}:=\ulcorner\langle x,\varphi x\rangle\urcorner$, $x\in y := T(S(x,y))$.

Con queste definizioni vale 3.1. Valgono inoltre, nel caso classico, tutti gli assiomi di Aczel-Feferman, nella variante di Aczel.

Si ottiene così una versione della teoria di Aczel-Feferman valida anche intuizionisticamente.

Inoltre, la nostra interpretazione fornisce, tanto classicamente che intuizionisticamente, una precisazione del significato informale dell'operatore $\equiv$, esplicitando l'idea, soltanto vagamente suggerita da Aczel e Feferman, di <u>equivalenza definizionale</u>.

Infatti, atteso il significato, illustrato sopra, della fondatezza semantica in termini di condizioni di verità, la nostra definizione di $\varphi \equiv \psi$ può così essere letta: le clausole 1.1 definiscono condizioni di verità per φ se, e solo se, definiscono condizioni di verità per ψ e, in caso affermativo, φ e ψ sono logicamente equivalenti.

Bibliografia

Aczel P. and Feferman S. 1980 'Consistency of the unrestricted abstraction principle using an intensional equivalence operator', in 'to H.B. Curry ', Seldin and Hindley ed., pp.67-98.

Kripke S. 1975 ' Outline of a theory of truth ', Journal of Philosophy, vol.72, pp. 690-716.

Feferman S. 1984 ' Toward useful type-free theories I', Journal of Symbolic Logic, vol.49, N. 1, pp.75-111.