Estratto da

A. Zanardo (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Volume 4, Siena 27-30 maggio 1987.

TEORIE DEL PRIMO ORDINE DA UN PUNTO DI VISTA DI COSTRUTTIVISMO "INGENUO": COMPATIBILITÀ COSTRUTTIVA DI PRINCIPI MATEMATICI E LOGICI IN UN SISTEMA DEDUTTIVO "GRANDE"

PIERANGELO MIGLIOLI, UGO MOSCATO, MARIO ORNAGHI
Dipartimento di Scienze dell'Informazione dell'Università di Milano

1. Introduzione.

In [10] abbiamo esposto vari risultati di costruttività per sistemi formali del primo ordine T+L, dove T (una teoria nel senso di [3]) è un insieme di formule chiuse (gli assiomi matematici) e L indica una logica (un apparato deduttivo) intermedia fra quella intuizionista del primo ordine con identità INT e quella classica del primo ordine con identità CL (qui, come in [10], indicheremo con "$T \vdash^{L} A$" il fatto che A è deducibile nel sistema T+L; data una teoria T, si possono costruire, fra gli altri, il T-sistema intuizionista T+INT e il T-sistema classico T+CL; poichè, come in [10], saremo interessati a sistemi T+L che risultano consistenti sse il T-sistema classico lo è, assumeremo che L contenga il principio di Kuroda $\forall x \neg\neg A(x) \longrightarrow \neg\neg\forall x A(x)$, che denoteremo con (K); la presenza di (K) in L fa sì, come è noto [13], che valga $T \vdash^{L} \neg\neg A$ sse $T \vdash^{CL} A$).

La nozione di 'costruttività' considerata in [10] corrisponde al punto di vista del cosiddetto 'costruttivismo ingenuo'. In effetti, un sistema S=T+L viene considerato costruttivo se soddisfa le proprietà della disgiunzione PD ($T \vdash^{L} A \vee B \Longrightarrow T \vdash^{L} A$ o $T \vdash^{L} B$ per $A \vee B$ chiusa) e dell'esplicita definibilità PED ($T \vdash^{L} \exists x A(x) \Longrightarrow$ esiste t chiuso t.c. $T \vdash^{L} A(t)$, per $\exists x A(x)$ chiusa); e tali proprietà non individuano univocamente una semantica o, data T, un sistema formale (come è noto, non esiste il più grande sottosistemà massimale del T-sistema classico che soddisfi PD e PED [13] ; possono esistere solo sottosistemi massimali di questo tipo). Ma l'ipoteca di carattere negativo sottintesa dalla qualificazione 'ingenuo' ha corrisposto, secondo noi, a una carenza di sviluppi di ricerca che estendano in maniera significativa il tradizionale contesto intuizionista. Inoltre, per quanto riguarda la possibilità di usare sistemi formali per problemi informatici quali la sintesi dei programmi [2,4,7,9] (che ha costituito la motivazione originaria della ricerca esposta in [10]), riteniamo che le proprietà costruttive rilevanti siano PD e PED (questo a prescindere da questioni di complessità e di reale praticabilità, per cui non esiste, d'altra parte, alcuna evidenza a favore di semantiche 'non ingenue' quali la semantica intesa dell'intuizionismo).

In questo ordine di idee, al di là delle stesse motivazioni informatiche, lo scopo di [10] è stato quello di offrire una panoramica di risultati abbastanza ampia da costituire un primo embrione per una classificazione della mutua 'compatibilità costruttiva' di vari principi matematici e logici in sistemi formali 'grandi'. Il significato del termine 'grandi' è spiegato in [10]: si vuole mettere in evidenza il fatto che tali sistemi intendono essere, e sono, più potenti dei sistemi costruttivi usualmente trattati in letteratura; in tal senso, non si vuole scegliere (giustificare) un particolare orizzonte semantico e individuare qualche sistema formale che ad esso si adegui (secondo un teorema di validità e completezza), ma si intende individuare i più ampi frammenti possibili di certi sistemi classici che soddisfino PD e PED e che siano al tempo stesso _effettivi_ (cioè assiomatizzabili).

I nostri risultati sono stati ottenuti mediante una tecnica che mescola aspetti sintattici con aspetti propriamente semantici; in [10] essi sono presentati senza dimostrazione e la tecnica è illustrata, molto a grandi linee, soltanto in un caso e soltanto negli aspetti semantici (paragrafo 4, Teorema 3). Il presente articolo si propone di integrare [10], illustrando in sufficiente dettaglio tale tecnica: allo scopo, tratteggeremo la dimostrazione di uno dei teoremi di [10] (il Teorema 5) che richiedono l'uso della tecnica nella sua forma più articolata. Riteniamo che tale esposizione possa risultare interessante, non solo per quanto riguarda gli aspetti generali e quelli sintattici della dimostrazione, ma anche perchè coinvolge una particolare 'semantica non ingenua' (una variante della quale è stata esposta in [9]) che costituisce una delle possibili generalizzazioni al primo ordine della semantica pro-

posizionale di Medvedev [6,11] (osserveremo comunque che i vari risultati di [10] richiedono varie semantiche 'costruttivamente incompatibili', che devono essere specificate di volta in volta, in dipendenza del sistema formale di cui si vuole dimostrare la costruttività; per una esposizione completa della nostra ricerca rimandiamo al rapporto interno [8]).

La presentazione che daremo si articolerà nei seguenti punti. Nel paragrafo 2 esporremo la semantica, basata sulla nozione di 'forma di valutazione' [9,11] . Essa ci permetterà, data una teoria T, di definire l'insieme di formule Costr(T) incluso nel T-sistema classico generato da T e includente il T-sistema intuizionista. L'insieme Costr(T) risulta chiuso rispetto a PD e a PED, ma _in generale non è effettivo_. Così, nel paragrafo 3 definiremo una classe di teorie T incluse in Costr(T) e un'ampia classe di principi logici che permettono di ottenere sistemi 'grandi' ed effettivi T+L inclusi in Costr(T). I sistemi del paragrafo 3, pur essendo contenuti in Costr(T), non soddisfano necessariamente PD e PED. Nel paragrafo 4 indeboliremo la logica L del paragrafo 3 (che, come in [10], sarà chiamata ESTIKA2) nella logica L' (che, come in [10], sarà chiamata DESTIKA2), in modo da ottenere sistemi T+L' (ancora 'grandi') inclusi in Costr(T). A partire da questa inclusione, la particolare forma dei principi logici di L' e degli assiomi di T ci permetterà di applicare la nostra tecnica sintattica, che noi chiamiamo "tecnica delle collezioni" [7,11] , per dimostrare che i sistemi T+L' soddisfano PD e PED. E' questo il risultato finale di costruttività a cui perverremo.

2. L'ambito costruttivo Costr(T).

Assumeremo che l'insieme Term($\mathcal{L}$) dei termini chiusi del linguaggio $\mathcal{L}$ di T non sia vuoto. Per ogni $A \in \mathcal{L}$ definiremo l'insieme $\mathfrak{F}(A)$ delle _forme di valutazione_ di A (indicate da simboli quali "$\check{A}$") induttivamente come segue: 1) $\mathfrak{F}(A) = \{A\}$ per A atomica o negata (cioè, della forma $A = \neg B$); 2) $\mathfrak{F}(B \wedge C) = \mathfrak{F}(B) \times \mathfrak{F}(C)$ (il prodotto cartesiano di $\mathfrak{F}(B)$ e $\mathfrak{F}(C)$); 3) $\mathfrak{F}(B \vee C) = (\mathfrak{F}(B) \times \{0\}) \cup (\mathfrak{F}(C) \times \{1\})$ (l'unione disgiunta di $\mathfrak{F}(B)$ e $\mathfrak{F}(C)$); 4) $\mathfrak{F}(B \rightarrow C) = \mathfrak{F}(C)^{\mathfrak{F}(B)}$ (l'insieme di tutte le funzioni da $\mathfrak{F}(B)$ a $\mathfrak{F}(C)$); 5) $\mathfrak{F}(\exists x B(x)) = \bigcup_{t \in Term(\mathcal{L})} \langle t, \check{B}(t) \rangle / \check{B}(t) \in \mathfrak{F}(B(t))\}$; 6) $\mathfrak{F}(\forall x B(x)) = \{ f / f$ è una funzione che associa, ad ogni $t \in Term(\mathcal{L})$, una $\check{B}(t) \in \mathfrak{J}(B(t))\}$.

Per ogni modello $\mathfrak{M}$ di T, per ogni $A \in \mathcal{L}$ e per ogni $\check{X} \in \mathfrak{J}(A)$, definiremo la relazione "$\mathfrak{M} \models \check{X}$" ($\check{X}$ è vera in $\mathfrak{M}$, o $\mathfrak{M}$ soddisfa $\check{X}$) induttivamente come segue:
1)per A atomica o negata, $\mathfrak{M} \models \check{X}$ sse $\mathfrak{M} \models A$ (qui $\check{X}=A$); 2) se $\check{X}=\langle \check{B},\check{C}\rangle \in \mathfrak{J}(B\wedge C)$, allora $\mathfrak{M} \models \check{X}$ sse $\mathfrak{M} \models \check{B}$ e $\mathfrak{M} \models \check{C}$; 3) se $\check{X}=\langle \check{B},0\rangle \in \mathfrak{J}(B\vee C)$, allora $\mathfrak{M} \models \check{X}$ sse $\mathfrak{M} \models \check{B}$; se $\check{X}=\langle \check{C},1\rangle \in \mathfrak{J}(B\vee C)$, allora $\mathfrak{M} \models \check{X}$ sse $\mathfrak{M} \models \check{C}$; 4) se $\check{X}=B\check{\to}C \in \mathfrak{J}(B\to C)$, allora $\mathfrak{M} \models \check{X}$ sse valgono entrambe le condizioni: a) $\mathfrak{M} \models B\to C$; b) per ogni $\check{B}\in\mathfrak{J}(B)$, se vale $\mathfrak{M} \models \check{B}$ vale anche $\mathfrak{M} \models B\check{\to}C(\check{B})$ (dove $B\check{\to}C(\check{B})$, appartenente a $\mathfrak{J}(C)$, è il valore della funzione $B\check{\to}C$ per l'argomento $\check{B}$); 5) se $\check{X}=\langle t,\check{B}(t)\rangle \in \mathfrak{J}(\exists xB(x))$, allora $\mathfrak{M} \models \check{X}$ sse $\mathfrak{M} \models \check{B}(t)$; 6)se $\check{X}= \forall\check{x}B(x) \in \mathfrak{J}(\forall xB(x))$, allora $\mathfrak{M} \models \check{X}$ sse valgono entrambe le condizioni: a) $\mathfrak{M} \models \forall xB(x)$; b) per ogni $t\in Term(\mathcal{L})$, $\mathfrak{M} \models \forall\check{x}B(x)(t)$ (dove $\forall\check{x}B(x)(t)$ indica il valore della funzione $\forall\check{x}B(x)$ per l'argomento t).

Si ha banalmente: se esiste $\check{X}\in\mathfrak{J}(A)$ t.c. $\mathfrak{M}\models\check{X}$, allora $\mathfrak{M}\models A$. In generale non vale il viceversa.

Data $A\in\mathcal{L}$ e $\check{X}\in\mathfrak{J}(A)$, porremo $T\models\check{X}$ ($\check{X}$ è T-valida) sse, per ogni modello $\mathfrak{M}$ di T, $\mathfrak{M}\models\check{X}$.

Denotando con "U(A)" la chiusura universale di A (che coincide con A se A è chiusa), potremo così definire l'insieme di formule Costr(T):
Costr(T)$=\{A\ /$ esiste $\check{U}(A)\in\mathfrak{J}(U(A))$ t.c. $T\models\check{U}(A)\}$.

Si ha banalmente: Costr(T) è incluso nel T-sistema classico generato da T (nell'insieme di formule dimostrabili in T+CL).

Come in [10], chiameremo IKA la logica ottenuta aggiungendo a INT il principio (K) e la famiglia di formule (AT): $\neg\neg A\to A$ per ogni A atomica.

L'aggiunta di (AT), combinata con quella di (K), ci sarà utile in seguito.

Il seguente teorema (una sorta di teorema di validità) è dimostrato per esteso in [8] :
Teorema 1. a)Costr(T) è chiuso rispetto a PD e a PED; b)se $\Gamma\subseteq$ Costr(T) e $\Gamma\vdash^{IKA} A$, allora $A\in$ Costr(T). #

Per quanto riguarda la teoria T, non è detto che valga $T\subseteq$Costr(T), così S=T+IKA può non essere incluso in Costr(T). Nel prossimo paragrafo caratterizzeremo una fa-

miglia di teorie che ci permetteranno di ottenere (utilizzando anche logiche che estendono IKA) sottoinsiemi effettivi di Costr(T).

3. Sottosistemi effettivi di Costr(T).

Dovremo anzitutto introdurre alcune nozioni.

Diremo che una teoria T formalizza completamente un modello isoiniziale sse T soddisfa le seguenti condizioni: a) per ogni formula atomica chiusa A, $T\vdash^{CL}A$ o $T\vdash^{CL}\neg A$ (diremo che T è atomicamente completa); b)esiste un modello $\mathfrak{M}$ di T, detto isoiniziale, tale che ogni elemento del supporto di $\mathfrak{M}$ è denotato da almeno un elemento di Term($\mathcal{L}$).

Le teorie con modello isoiniziale sono definite in [1, 2] come quelle teorie per cui esiste un modello $\mathfrak{M}$ (isoiniziale) che può essere immerso isomorficamente in un sol modo in ogni altro modello di T. Ivi tali teorie sono proposte come quelle che caratterizzano la nozione informatica intuitiva di "tipo di dati astratto". Come stabilito in [2,9,8], ogni teoria con modello isoiniziale può essere estesa, senza alterarne l'assiomatizzabilità e in modo essenziale la classe dei modelli, in una teoria che formalizza completamente un modello isoiniziale: basta aggiungere un diagramma ricorsivo del modello isoiniziale (che esiste sempre se T è assiomatizzabile).

Vale il seguente fatto [2,9,8]:
Teorema 2. Se T formalizza completamente un modello isoiniziale, allora, per ogni formula chiusa priva di quantificatori F e per ogni modello $\mathfrak{M}$ di T, $\mathfrak{M}\models F$ sse $T\vdash^{CL}F$ (in particolare $T\vdash^{CL}F$ o $T\vdash^{CL}\neg F$). #

Come già visto, la presenza di (K) in IKA fa sì che $T\vdash^{CL}A$ sse $T\vdash^{IKA}\neg\neg A$ (per ogni A); così, la presenza in IKA di (AT) fa sì che, per ogni A atomica, $T\vdash^{CL}A$ sse $T\vdash^{IKA}A$. A partire da questo fatto e dal Teorema 2, si ottiene facilmente per induzione (si veda anche [2, 8]):
Teorema 3. Se T formalizza completamente un modello isoiniziale, allora, per ogni formula chiusa priva di quantificatori F, $T\vdash^{CL}F$ sse $T\vdash^{IKA}F$. #

Anche se T formalizza completamente un modello isoiniziale, non è detto che valga $T\subseteq$Costr(T); perchè questo avvenga, si dovranno imporre particolari restrizioni alle formule di T.

Diremo che A è una $\forall\exists$-formula sse $A=\forall\underline{x}\exists\underline{y}F(\underline{x},\underline{y})$, dove $F(\underline{x},\underline{y})$ è priva di quantificatori. Le quantificazioni universali e/o quelle esistenziali possono essere vuote;

così, come casi particolari di $\forall\exists$-formule, avremo le formule prive di quantificatori, le <u>$\forall$-formule</u> (della forma $\forall \underline{x} F(\underline{x})$ con $F(\underline{x})$ priva di quantificatori), o le <u>$\exists$-formule</u> (della forma $\exists \underline{x} F(\underline{x})$, con $F(\underline{x})$ priva di quantificatori).

Diremo che A è una $\forall\neg$-formula sse A soddisfa una delle seguenti clausole induttive: 1) A è una $\forall$-formula; 2) A è una formula negata; 3) $A = B \wedge C$, e B e C sono $\forall\neg$-formule; 4) $A = B \rightarrow C$, e C è una $\forall\neg$-formula (B è arbitraria); 5) $A = \forall x B(x)$ e $B(x)$ è una $\forall\neg$-formula.

Ovviamente, esistono $\forall\exists$-formule che non sono $\forall\neg$-formule, e viceversa. L'insieme delle $\forall\neg$-formule contiene, come si vede immediatamente, l'insieme delle Harrop formule [13].

Le nostre teorie avranno $\forall\exists$-assiomi o $\forall\neg$-assiomi; oltre a questi assiomi, esse potranno contenere (senza alcuna restrizione negli schemi) lo schema di <u>induzione strutturale</u> (SIND) e lo schema delle <u>catene discendenti</u> (SDC).

Lo schema (SIND) è così specificato:

(SIND): $A(c1) \wedge .. \wedge A(cm) \wedge \forall x1 .. \forall xk1 (A(x1) \wedge .. \wedge A(xk1) \rightarrow A(f1(x1,..,xk1))) \wedge .. \wedge \forall x1 .. \forall xkn (A(x1) \wedge .. \wedge A(xkn) \rightarrow A(fn(x1,..,xkn))) \rightarrow \forall y A(y)$, per ogni A del linguaggio (dove c1,..,cm sono costanti del linguaggio e dove f1,..,fn sono simboli di funzione di arità, rispettivamente, k1,..,kn).

Diremo che <u>T contiene (SIND) appropriatamente</u> sse (SIND) è uno schema di T, e T formalizza completamente un modello isoiniziale $\mathcal{M}$, e ogni elemento del supporto di $\mathcal{M}$ è rappresentato da un termine chiuso costruito unicamente con le costanti c1,..,cm e con i simboli di funzione f1,..,fn.

Lo schema (SDC) è così specificato:

(SDC) $\exists x A(x) \wedge \forall x (A(x) \rightarrow \exists y (A(y) \wedge y < x) \vee B) \rightarrow B$, per ogni A e B del linguaggio, x non libera in B.

Diremo che <u>T contiene (SDC) appropriatamente</u> sse (SDC) è uno schema di T, e T formalizza completamente un modello isoiniziale $\mathcal{M}$, e T formalizza $<$ come una relazione irriflessiva e transitiva che è ben fondata su $\mathcal{M}$.

Usando la logica classica, si può dedurre (SIND) da (SDC). Questo non vale per le logiche costruttive di questo articolo, per cui (SIND) e (SDC) risultano indipendenti.

Diremo ora che T è <u>Costr(T)-adeguata</u> sse T soddisfa le

seguenti condizioni: 1) T formalizza completamente un modello isoiniziale; 2) eventualmente, T contiene (SIND) e/o (SDC) appropriatamente; 3) tutti gli assiomi di T che non sono istanze di (SIND) o di (SDC) sono $\forall\exists$-formule o $\forall\neg$-formule.

Per una dimostrazione del seguente teorema rimandiamo il lettore a [8] (i Teoremi 2 e 3 sono utilizzati per trattare i $\forall\exists$-assiomi e i $\forall\neg$-assiomi di T):

<u>Teorema</u> 4. Se T è Costr(T)-adeguata, allora $T \vdash^{IKA} A$ implica $A \in$ Costr(T). #

Ci proponiamo ora, per teorie T Costr(T)-adeguate, di estendere i sistemi T+IKA in sistemi 'grandi'; per far ciò, dovremo estendere la logica IKA. Il seguente teorema, già enunciato in [9], risulta fondamentale a questo proposito; per una sua dimostrazione (che, pur essendo interessante, occuperebbe uno spazio eccessivo nel presente contesto) rimandiamo il lettore a [8].

<u>Teorema 5.</u> Siano A,B e C formule chiuse tali che:

1) per ogni modello $\mathcal{M}$ di T (che è una teoria arbitraria, non necessariamente una teoria Costr(T)-adeguata), se $\mathcal{M} \models B$ allora esiste $\check{B} \in \mathfrak{J}(B)$ t.c. $\mathcal{M} \models \check{B}$;

2) per ogni $\check{A} \in \mathfrak{J}(A)$ e per ogni modello $\mathcal{M}$ di T t.c. $\mathcal{M} \models \check{A}$, una delle seguenti tre condizioni è soddisfatta:

2a) $\mathcal{M} \models \check{B}$ per ogni $\check{B} \in \mathfrak{J}(B)$;

2b) $\mathcal{M} \not\models \check{B}$ per ogni $\check{B} \in \mathfrak{J}(B)$;

2c) per ogni $\check{C} \in \mathfrak{J}(C)$, se esiste un modello $\mathcal{M}^*$ di T t.c. $\mathcal{M}^* \models \check{A}$ e $\mathcal{M}^* \models \check{C}$, allora $\mathcal{M} \models \check{C}$.

Allora (per ogni formula chiusa D), la seguente formula appartiene a Costr(T):

(COSTR$\vee$): $(A \rightarrow (B \rightarrow C \vee D)) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C) \vee (B \rightarrow D))$.

Inoltre, se $C = \exists w C'(w)$ (con le stesse ipotesi su A,B e C), la seguente formula appartiene a Costr(T):

(COSTR$\exists$): $(A \rightarrow (B \rightarrow \exists w C'(w))) \rightarrow (A \rightarrow \exists w (B \rightarrow C'(w)))$. #

Specificando in maniera effettiva classi di formule A,B e C che soddisfano il Teorema 5, possiamo ottenere un'ampia famiglia di schemi logici validi in Costr(T), che aggiunti a IKA danno luogo a una logica più potente della logica ESTIKA2 considerata nel Teorema 4 di [10] (si veda [8]). Per ragioni di spazio, ci limiteremo a descrivere ESTIKA 2 (che risulta pur sempre una forte estensione di IKA). Allo scopo, dovremo introdurre alcune nozioni.

Diremo che una formula A è <u>T-stabile</u> sse A soddisfa le seguenti clausole induttive:
1) A è atomica o negata; 2) A è una $\exists$-formula e vale $T \vdash^{CL} A$; 3) $A = B \wedge C$, o $A = B \vee C$, con B e C T-stabili; 4) $A = B \rightarrow C$, con C T-stabile; 5) $A = \forall x B(x)$, con B(x) T-stabile.
Si dimostra facilmente [8] che una formula T-stabile soddisfa la condizione 1) del Teorema 5:
<u>Teorema 6.</u> Se B è T-stabile, $\mathfrak{M}$ è un modello di T, $\mathfrak{M} \models B$, e T è Costr(T)-adeguata, allora esiste $\check{B} \in \mathfrak{J}(B)$ t.c. $\mathfrak{M} \models \check{B}$.
Se T non è Costr(T)-adeguata, il Teorema 6 puo non valere per B, a causa della clausola 2) della definizione di formula T-stabile; se però eliminiamo la clausola 2), otteniamo la classe delle formule stabili, per cui il Teorema 6 vale incondizionatamente (per ogni T).

Siano $U(\underline{v},\underline{y})$ e $V(\underline{v},\underline{y}')$ formule contenenti libere, al massimo, le variabili indicate; diremo che <u>C è una formula in $U, U \rightarrow V, \underline{y}, \underline{y}', \underline{v}$</u> sse C è induttivamente così definita:
1) $C = U(\underline{v},\underline{t})$, dove le eventuali variabili contenute nei termini $\underline{t}$ sono diverse da ciascuna delle $\underline{v}$; 2) $C = U(\underline{v},\underline{t}) \rightarrow V(\underline{v},\underline{t}')$, dove le eventuali variabili contenute nei termini $\underline{t}$ e $\underline{t}'$ sono diverse da ciascuna delle $\underline{v}$; 3) $C = \neg C'$, o $C = C1 \wedge C2$, o $C = C1 \vee C2$, o $C = C1 \rightarrow C2$, con C', C1 e C2 formule in $U, U \rightarrow V, \underline{y}, \underline{y}', \underline{v}$; 4) $C = \exists w C'(w)$, o $C = \forall w C'(w)$, dove $C'(w)$ è una formula in $U, U \rightarrow V, \underline{y}, \underline{y}', \underline{v}$ e w è una variabile diversa da ciascuna delle $\underline{v}$.

Possiamo ora definire le due seguenti famiglie di principi:
$(F\vee)$: $(A \rightarrow (B \rightarrow C \vee D)) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C) \vee (B \rightarrow D))$, <u>purchè sia soddisfatta la condizione (c) descritta sotto</u>;
$(F\exists)$: $(A \rightarrow (B \rightarrow \exists w C'(w))) \rightarrow (A \rightarrow \exists w (B \rightarrow C'(w)))$, <u>purchè sia soddisfatta la condizione (c) descritta sotto</u>.
La condizione (c) è la seguente:
(c): esistono formule $H(\underline{x})$, $K(\underline{x})$, $U(\underline{y})$ e $V(\underline{y}')$ e variabili $\underline{v}$ che soddisfano simultaneamente i seguenti punti:
(c1): K(x) è T-stabile;
(c2) $A = \forall \underline{x} (\neg\neg H(\underline{x}) \wedge \neg\neg K(\underline{x}) \rightarrow \forall \underline{y} \neg U(\underline{y}))$;
(c3) $B = \forall \underline{x} (H(\underline{x}) \rightarrow K(\underline{x}))$;
(c4) le (eventuali) variabili libere di A sono in $\underline{v}$;
(c5) C ($C'(w)$ nel caso di $(F\exists)$) è una formula in $U, U \rightarrow V, \underline{y}, \underline{y}', \underline{v}$.

Definiremo a questo punto ESTIKA2 come quella logica che si ottiene aggiungendo a IKA le due famiglie di principi $(F\vee)$ e $(F\exists)$.

Dal Teorema 5 e dal Teorema 6 si può dedurre il seguente teorema di validità per i sistemi T+ESTIKA2 (con T Costr(T)-adeguata); il punto chiave della dimostrazione (che per ragioni di spazio sarà omessa e per cui rimandiamo a [8]) consiste nel far vedere che le istanze chiuse di $(F\vee)$ e $(F\exists)$ soddisfano le ipotesi del Teorema 5.
<u>Teorema 7.</u> Se T è Costr(T)-adeguata e $T \vdash^{ESTIKA2} A$, allora $A \in$ Costr(T). #

In ESTIKA 2 si possono dedurre interessanti principi quali:
$((A \rightarrow B) \rightarrow C \vee D) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow C) \vee (\neg A \rightarrow D)$ con B T-stabile;
$\neg(A \wedge B) \wedge ((\neg\neg B \rightarrow B) \rightarrow \neg\neg A \vee (\neg\neg A \rightarrow A)) \rightarrow \neg\neg A \vee (\neg\neg A \rightarrow A)$, con B T-stabile.

Il principio di Kreisel e Putnam $(KP\vee)$ [5] e l'analogo principio $(KP\exists)$ per il quantificatore esistenziale (noto anche come (IP) [13]) sono così definiti:
$(KP\vee)$: $(\neg A \rightarrow B \vee C) \rightarrow (\neg A \rightarrow B) \vee (\neg A \rightarrow C)$;
$(KP\exists)$: $(\neg A \rightarrow \exists x B(x)) \rightarrow \exists x (\neg A \rightarrow B(x))$, x non libera in A.
La seguente proposizione ci sarà utile nel prossimo paragrafo [8]:
<u>Prop. 1.</u> Tutte le istanze di $(KP\vee)$ e di $(KP\exists)$ sono deducibili nella logica ESTIKA2. #

Osserveremo che come conseguenza immediata del Teorema 1 e del Teorema 7 si ha:
<u>Corollario 1.</u> Se T è Costr(T)-adeguata, $A \vee B$ è chiusa e $T \vdash^{ESTIKA2} A \vee B$, allora $T \vdash^{CL} A$ o $T \vdash^{CL} B$; se T è Costr(T)-adeguata, $\exists x A(x)$ è chiusa e $T \vdash^{ESTIKA2} \exists x A(x)$, allora esiste t chiuso t.c. $T \vdash^{CL} A(t)$. #
Il Corollario 1 coincide col Teorema 4 di [10] e stabilisce, secondo la terminologia di [10] , la semicostruttività dei sistemi T+ESTIKA2 quando T è Costr(T)-adeguata. La semicostruttività di tali sistemi non implica necessariamente la loro costruttività; per ottenere quest'ultima proprietà dovremo indebolire la logica ESTIKA2, come vedremo nel prossimo paragrafo.

4. Sottosistemi effettivi e costruttivi di Costr(T).

Avremo anzitutto bisogno delle due seguenti nozioni.
Diremo che una formula A è <u>negativamente satura</u> sse ogni occorrenza in A di uno dei due quantificatori è nel campo d'azione di una negazione.
Diremo che A è <u>quasi negativamente satura</u> sse esiste $A'(\underline{x})$ t.c. $A = \exists \underline{x} A'(\underline{x})$ e $A'(\underline{x})$ è negativamente satura.

Indeboliremo ora ($F\vee$) e ($F\exists$) in ($DF\vee$) e ($DF\exists$) come segue:
($DF\vee$) contiene solo le istanze di ($F\vee$) in cui C è quasi negativamente satura e D è negata;
($DF\exists$) contiene tutte le istanze di ($F\exists$) in cui $C'(w)$ è quasi negativamente satura.

A causa delle restrizioni ora introdotte, la logica ottenuta aggiungendo ($DF\vee$) e ($DF\exists$) a IKA non permette più di derivare ($KP\vee$) e ($KP\exists$). Così, definiremo DESTIKA2 (che costituisce un indebolimento di ESTIKA2) nel seguente modo [10]:
DESTIKA2 è ottenuta aggiungendo a IKA i principi ($KP\vee$), ($KP\exists$), ($DF\vee$) e ($DF\exists$).

Dal Teorema 7 e dalla Prop. 1, deduciamo:
<u>Corollario 2.</u> Se T è una teoria Costr(T)-adeguata, allora $T \vdash_{DESTIKA2} A$ implica $A \in$ Costr(T). #

Ci sarà utile, nel seguito, isolare la sottologica KPIKA: essa è ottenuta aggiungendo a IKA il principio ($KP\vee$). Vale il seguente teorema, la cui dimostrazione, di carattere proposizionale, si può trovare in [11,8]:
<u>Teorema 8.</u> Se A è negativamente satura, esistono formule negate $\neg A1,..,\neg Am$ ($m \geq 1$) t.c. $\vdash_{KPIKA} A \leftrightarrow \neg A1 \vee .. \vee \neg Am$. #

Utilizzando il Teorema 1 (punto a)), il Corollario 2 e il Teorema 8 e applicando la tecnica sintattica delle collezioni accennata nel paragrafo 1, possiamo finalmente dimostrare la costruttività dei sistemi T+DESTIKA2 con T Costr(T)-adeguata.

<u>Teorema 9.</u> Se T è Costr(T)-adeguata, allora T+DESTIKA2 soddisfa PD e PED.
<u>Dimostrazione</u> (non in completo dettaglio).

Utilizzeremo la tecnica delle collezioni, che è già stata illustrata in [7,11]. A differenza di quei lavori, dovendo qui trattare le regole ($KP\vee$) e ($KP\exists$), faremo ricorso ad un insieme di collezioni anzichè ad un'unica collezione. Più precisamente, per ogni <u>insieme finito Γ di formule chiuse e negate</u>, definiremo Coll(Γ) nel seguente modo: Coll(Γ) $= \{A \mid A$ è chiusa e $T \cup \Gamma \vdash_{DESTIKA2} A\}$, dove $T\cup\Gamma$ indica la teoria ottenuta aggiungendo a T le formule di Γ. Dato Γ e A chiusa, diremo che A è <u>ben data in Coll(Γ)</u> (A è b.d. in Coll(Γ)) sse $A \in$ Coll(Γ) e soddisfa una delle seguenti clausole induttive: 1) A è atomica o negata; 2) $A = B \wedge C$, e B è b.d. in Coll(Γ) e C è b.d. in Coll(Γ); 3) $A = B \vee C$, e B è b.d. in Coll(Γ) o C è b.d. in Coll(Γ); 4) $A = B \rightarrow C$, e, <u>per ogni $\Gamma' \supseteq \Gamma$ t.c. B è b.d. in Coll(Γ')</u>, C è b.d. in Coll(Γ'); 5) $A = \exists x B(x)$, e esiste $t \in$ Term($\mathcal{L}$) t.c. $B(t)$ è b.d. in Coll(Γ); 6) $A = \forall x B(x)$, e, per ogni $t \in$ Term($\mathcal{L}$), $B(t)$ è b.d. in Coll(Γ).

Si dimostra facilmente per induzione:
a) se A è b.d. in Coll(Γ) e $\Gamma' \supseteq \Gamma$, allora A e b.d. in Coll(Γ').

Per proseguire la dimostrazione, è utile identificare il sistema formale T+DESTIKA2 con il calcolo pseudo-naturale $\mathcal{C}$(T+DESTIKA2), ottenuto aggiungendo al calcolo naturale per INT [12] i $\forall\exists$-assiomi e i $\forall\neg$-assiomi di T (regole a zero premesse), (K), (AT), ($KP\vee$), ($KP\exists$), ($F\vee$) e ($F\exists$) nella forma di regole a una premessa (gli antecedenti delle implicazioni diventano le premesse di tali regole, i conseguenti le conseguenze), (SIND) nella forma (ben nota) di regola a m+n premesse adatta al calcolo naturale (m le costanti della base, n le funzioni del passo) e (PCD) nella forma della seguente regola:

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \Pi\\ \exists x A(x)\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\cdots \cancel{A(p)}\\ \Pi'\\ \exists x(A(x)\wedge x<p)\vee B\end{matrix}}{B} \quad .$$

Per induzione e facendo un uso essenziale dei Teoremi 2 e 3 si deve ora dimostrare (si veda [8]):
b) per ogni Γ, tutti gli assiomi di $\mathcal{C}$(T+DESTIKA2) (cioè, tutte le regole a zero premesse di tale calcolo, che sono $\forall\exists$-formule e $\forall\neg$-formule) sono b.d. in Coll(Γ).

Utilizzando a) e b), si deve poi dimostrare il seguente lemma fondamentale:

c) se $\begin{matrix}A1,..,An\\ \Pi\\ B\end{matrix}$ è una prova nel calcolo $\mathcal{C}$(T+DESTIKA2) in cui $A1,..,An$ sono le assunzioni non scaricate e B è la conseguenza, allora, per ogni Γ, si ha: se $A1,..,An$ sono b.d. in Coll(Γ) allora B è b.d. in Coll(Γ) (B chiusa).

La dimostrazione di c) è per induzione sulla complessità di Π. La base corrisponde al caso in cui Π è una prova di un passo: se A è l'unica assunzione non scaricata e la conseguenza di Π (introduzione di assunzione), allora l'asserto si riduce alla tautologia che se A è b.d. in Coll(Γ) allora A è b.d. in Coll(Γ); se A è introdotto come assioma di $\mathcal{C}$(T+DESTIKA2), allora l'asserto segue immediatamente dal punto b).

Per quanto riguarda il passo di induzione, illustreremo solo pochi casi significativi.

Sia (come esempio di regola di IKA) Π la prova

$$\frac{\begin{array}{c}\cdots\cancel{B1}\\ \Pi'\\ B2\end{array}}{B1\to B2}$$ (I→): poichè A1,..,An sono b.d. in Coll(Γ), a maggior ragione $\{A1,..,An\}\subseteq$ Coll(Γ); dunque, B $\in$ Coll(Γ). Sia ora $\Gamma'\supseteq\Gamma$ t.c. B1 è b.d. in Coll(Γ'): poichè A1,.., An sono b.d. in Coll(Γ), per a) si ha che A1,..,An sono b.d. in Coll(Γ'), dunque tutte le assunzioni non scaricate di Π' (A1,..,An e B1) sono b.d. in Coll(Γ'); applicando la ip. ind. a Π' si ha che B2 è b.d. in Coll(Γ').

Sia (come esempio di regola matematica) Π la prova

$$\frac{\begin{array}{c}\cdots\\ \Pi'\\ \exists x C(x)\end{array}\qquad \begin{array}{c}\cdots\cancel{C(p)}\\ \Pi''\\ \exists x(C(x)\wedge x<p)\vee B\end{array}}{B}$$ (PCD) nel contesto appropriato,

dove C(p) è scaricata dalla regola e dove p non occorre libera in B e nelle altre assunzioni non scaricate di Π'): supponiamo che Γ sia consistente con T (se no, B è banalmente b.d. in Coll(Γ)) e supponiamo per assurdo che B non sia b.d. in Coll(Γ). Applicando la ip. ind. a Π' otteniamo che esiste $t0\in$ Term($\mathcal{L}$) t.c. C(t0) è b.d. in Coll(Γ). Sostituendo in Π'' ogni occorrenza di p con t0 e applicando la ip. ind. alla prova così ottenuta, poichè B non è b.d. in Coll(Γ) si deduce che $\exists x(C(x)\wedge$ $\wedge x<t0)$ è b.d. in Coll(Γ): così, esiste t1 t.c. $C(t1)\wedge$ $\wedge\, t1<t0$ è b.d. in Coll(Γ); segue che C(t1) è b.d. in Coll(Γ) e che $T\vdash_{CL} t1<t0$ (poichè DESTIKA2 $\subseteq$ CL). Sostituendo in Π'' p con t1, e così via, poichè B non è b.d. in Coll(Γ) otteniamo che $T\vdash_{CL}\ ..tn<..<t1<t0$. Poichè Γ è consistente con T, dal Teorema 2 deduciamo che su un modello isoiniziale $\mathfrak{M}$ di T vale $\mathfrak{M}\models ..tn<..<t1<t0$, contro l'ipotesi che $<$ sia ben fondata in $\mathfrak{M}$.

Consideriamo adesso (ad es.) la regola (KP$\vee$), per illustrare la necessità di collezioni multiple al posto di una sola collezione (la regola (KP$\exists$) si tratta in modo analogo). Sia Π la prova

$$\frac{\begin{array}{c}\cdots\\ \Pi'\\ \neg A\to B\vee C\end{array}}{(\neg A\to B)\vee(\neg A\to C)}$$ (KP$\vee$): applicando la ip. ind. a Π' si ha che $\neg A\to B\vee C$ è b.d. in Coll(Γ). Sia ora $\Gamma'=\Gamma\cup\{\neg A\}$:

poichè $\Gamma'\supseteq\Gamma$, per a) si ha che $\neg A\to B\vee C$ è b.d. in Coll(Γ'); poichè (essendo negata e appartenendo a Γ') $\neg A$ è b.d. in Coll(Γ'), $B\vee C$ è b.d. in Coll(Γ'). Sia, per definitezza, B b.d. in Coll(Γ'): allora $T\cup\Gamma\cup\{\neg A\}\vdash_{DESTIKA2} B$, dunque $T\cup\Gamma\vdash_{DESTIKA2}\neg A\to B$, dunque $\neg A\to B\in$ Coll(Γ). Sia ora Γ'' t.c. $\Gamma''\supseteq\Gamma$ e $\neg A$ è b.d. in Coll(Γ''): essendo $\neg A\in$ Coll(Γ''), si ha Coll(Γ'')= =Coll($\Gamma''\cup\{\neg A\}$); poichè $\Gamma\cup\{\neg A\}\subseteq\Gamma''\cup\{\neg A\}$ e B è b.d. in Coll($\Gamma\cup\{\neg A\}$), B è b.d. in Coll($\Gamma''\cup\{\neg A\}$); segue che B è b.d. in Coll(Γ''). Così, risulta che $\neg A\to B$ è b.d. in Coll(Γ''), da cui segue l'asserto.

Le regole che abbiamo esaminato e tutte le regole di DESTIKA2 diverse da (F$\vee$) e (F$\exists$) richiedono unicamente strumenti sintattici; in particolare, si dimostra senza problemi:

c') il punto c) vale per prove costruite nel sottocalcolo $\mathcal{C}$(KPIKA) per la logica KPIKA.

A differenza delle regole precedenti, le regole critiche (F$\vee$) e (F$\exists$) richiedono l'integrazione di strumenti e risultati sintattici (fra cui la previa dimostrazione del punto c') visto sopra) e di tutto l'apparato semantico sviluppato nei paragrafi precedenti (in particolare il Teorema 1, punto a), e il Corollario 2). Delle due regole critiche illustreremo solo (F$\vee$) (l'altra si tratta in modo analogo).

Sia Π la prova

$$\frac{\begin{array}{c}\cdots\\ \Pi'\\ A\to(B\to C\vee D)\end{array}}{A\to(B\to C)\vee(B\to D)}$$ ((DF$\vee$), dove A,B e C soddisfano la condizione (c), C è quasi negativamente satura e D è negata); poichè (essendo le assunzioni non scaricate di Π contenute in Coll(Γ)) $A\to(B\to C)\vee(B\to D)\in$ Coll(Γ), basterà dimostrare:

se $\Gamma'\supseteq\Gamma$ e A è b.d. in Coll(Γ'), allora $(B\to C)\vee(B\to D)$ è b.d. in Coll(Γ').

Anzitutto, applicando la ip. ind. a Π', si ha che $A\to(B\to C\vee D)$ è b.d. in Coll(Γ), dunque, per a), $A\to$ $\to(B\to C\vee D)$ è b.d. in Coll(Γ'). In particolare, $B\to C\vee D\in$ $\in$ Coll(Γ'), da cui segue (per la presenza della regola (F$\vee$) stessa) che $(B\to C)\vee(B\to D)\in$ Coll(Γ'). Sia N(Γ') la doppia negazione della congiunzione delle formule di Γ': da $(B\to C)\vee(B\to D)\in$ Coll(Γ') si deduce $T\vdash_{DESTIKA2} N(\Gamma')\to(B\to C)\vee(B\to D)$, da cui segue, per il

Corollario 2, $N(\Gamma') \rightarrow (B \rightarrow C) \vee (B \rightarrow D) \in Costr(T)$, da cui, ancora per il Corollario 2 ((KP$\vee$) vale in $Costr(T)$), segue $(N(\Gamma') \rightarrow (B \rightarrow C)) \vee (N(\Gamma') \rightarrow (B \rightarrow D)) \in Costr(T)$. Per il punto a) del Teorema 1, otteniamo così: $N(\Gamma') \rightarrow (B \rightarrow C) \in Costr(T)$ o $N(\Gamma') \rightarrow (B \rightarrow D) \in Costr(T)$.

Sia $N(\Gamma') \rightarrow (B \rightarrow D) \in Costr(T)$: allora (a maggior ragione) $T \cup \Gamma' \vdash^{CL} B \rightarrow D$; poichè D è una formula negata, si deduce $T \cup \Gamma' \vdash^{IKA} B \rightarrow D$, da cui segue (a maggior ragione) $B \rightarrow D \in Coll(\Gamma')$. Essendo D negata, si ottiene così che $B \rightarrow D$ è ben data in $Coll(\Gamma')$, da cui segue che $(B \rightarrow C) \vee (B \rightarrow D)$ è b.d. in $Coll(\Gamma')$.

Sia $N(\Gamma') \rightarrow (B \rightarrow C) \in Costr(T)$, dove $C = \exists \underline{x} C'(\underline{x})$ e $C'(\underline{x})$ è negativamente satura: allora $N(\Gamma') \rightarrow (B \rightarrow \exists x C'(\underline{x})) \in Costr(T)$, da cui segue (per le ipotesi su B e su C e perchè in $Costr(T)$ vale la regola (DF$\exists$)) che $N(\Gamma') \rightarrow \exists \underline{x}(B \rightarrow C'(\underline{x})) \in Costr(T)$, da cui segue (poichè in $Costr(T)$ vale (KP$\exists$)) che $\exists \underline{x}(N(\Gamma') \rightarrow (B \rightarrow C'(\underline{x}))) \in Costr(T)$. Per il Teorema 1, punto a), esistono dunque termini chiusi $\underline{t}$ t.c. $N(\Gamma') \rightarrow (B \rightarrow C'(\underline{t})) \in Costr(T)$. Ora, $C'(\underline{t})$ è negativamente satura: per il Teorema 8, esistono $\neg C'1(\underline{t}), \ldots, \neg C'm(\underline{t})$ t.c. $\vdash^{KPIKA} C'(\underline{t}) \leftrightarrow \neg C'1(\underline{t}) \vee \ldots \vee \neg C'm(\underline{t})$. Si ha così (essendo KPIKA inclusa in $Costr(T)$) che $N(\Gamma') \rightarrow (B \rightarrow \neg C'1(\underline{t}) \vee \ldots \vee \neg C'm(\underline{t})) \in Costr(T)$, da cui si deduce (poichè (DF$\vee$) e (KP$\vee$) valgono in $Costr(T)$) che $(N(\Gamma') \rightarrow (B \rightarrow \neg C'1(\underline{t}))) \vee \ldots \vee (N(\Gamma') \rightarrow (B \rightarrow \neg C'm(\underline{t}))) \in Costr(T)$. Ancora per il Teorema 1, si ottiene che $N(\Gamma') \rightarrow (B \rightarrow \neg C'h(\underline{t})) \in Costr(T)$ per un opportuno h t.c. $1 \leq h \leq m$. Avremo dunque: $T \cup \Gamma' \vdash^{CL} B \rightarrow \neg C'h(\underline{t})$, da cui segue (essendo $\neg C'h(\underline{t})$ negata) che $B \rightarrow \neg C'h(\underline{t})$ è b.d. in $Coll(\Gamma')$. Essendo $\vdash^{KPIKA} \neg C'1(\underline{t}) \vee \ldots \vee \neg C'm(\underline{t}) \leftrightarrow C'(\underline{t})$, esiste una prova di φ(KPIKA) avente $\neg C'h(\underline{t})$ come unica assunzione non scaricata e $C'(\underline{t})$ come conseguenza. Applicando il punto c') visto sopra, si deduce così che $B \rightarrow C'(\underline{t})$ è b.d. in $Coll(\Gamma')$, dunque $B \rightarrow \exists \underline{x} C'(\underline{x})$ è b.d. in $Coll(\Gamma')$, dunque $(B \rightarrow C) \vee (B \rightarrow D)$ è b.d. in $Coll(\Gamma')$.

Avendo dimostrato c), si ottiene immediatamente:

d) tutte le formule di $Coll(\Gamma)$ sono b.d. in $Coll(\Gamma)$.

In particolare:

e) tutte le formule di $Coll(\emptyset)$ (dove $\emptyset$ è l'insieme vuoto) sono b.d. in $Coll(\emptyset)$.

Da e) si deduce immediatamente che T+DESTIKA2 soddisfa PD e PED. Ad es., sia $A \vee B$ chiusa dimostrbile in T+DESTIKA2: allora $A \vee B \in Coll(\emptyset)$, dunque $A \vee B$ è b.d. in $Coll(\emptyset)$, dunque A è b.d. in $Coll(\emptyset)$ o B è b.d. in $Coll(\emptyset)$, a fortiori A è dimostrabile in T+DESTIKA2 o B è dimostrabile in

T+DESTIKA2. ##

Bibliografia.

1. Bertoni A., Mauri G., Miglioli P. -On the power of model theory to specify abstract data types and to capture their recursiveness - Fundamenta Informaticae IV.2, 1983.
2. Bertoni A., Mauri G., Miglioli P., Ornaghi M. - Abstract data types and their extensions within a constructive logic - In: Lecture Notes in Comp. Sci., n. 173, Springer, 1984.
3. Chang C., Keisler H. -Model theory - North Holland, 1973.
4. Degli Antoni G., Miglioli P., Ornaghi M. -Top-down approach to the synthesis of programs - In: Lect. Notes in Comp. Sci., n. 19, Springer, 1974.
5. Kreisel G., Putnam H. - Eine unableitbarkeitsbeweismethode für den intuitionistichen Aussagenkalkül - Arkiv für mathematische Logik, 3, 1957.
6. Medvedev T. - Finite problems - Soviet Math. Doklady, 3, 1962.
7. Miglioli P., Ornaghi M. - A logically justified model of computation I, II -Fundamenta Informaticae IV. 1,2, 1981.
8. Miglioli P., Moscato U., Ornaghi M. -Constructive theories with superintuitionistic deductive systems: some results and techniques - Rapporto interno del Dipartimento di Scienze dell'Informazione dell'Università di Milano, 1986.
9. Miglioli P., Moscato U., Ornaghi M. - Constructive theories with abstract data types for program synthesis - Apparirà negli atti del "Symposium on Mathematical Logic and its applications, Druzhba, Bulgaria, September 1986".
10. Miglioli P., Moscato U., Ornaghi M. -Alcuni sistemi costruttivi e semicostruttivi del primo ordine - Atti degli Incontri di Logica Matematica, Volume 3 (a cura di R. Ferro e A. Zanardo).
11. P. Miglioli, U. Moscato, M. Ornaghi, S. Quazza, G. Usberti -Some results on intermediate constructive logics - Apparirà sul Notre Dame Journal of Formal Logic.
12. Prawitz D. - Natural deduction: a proof-theoretical study - Almqvist and Wiksell, 1965.
13. Troelstra A.S. - Metamathematical investigation of intuitionistic arithmetic ans analysis - Lect. Notes in Math., n. 344, Springer, 1973.