Estratto da

A. Zanardo (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Volume 4, Siena 27-30 maggio 1987.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

CONTROESEMPI DELLA PROPRIETÀ DI ELIMINAZIONE DEL TAGLIO E DELLA COERENZA DELLA LOGICA PURA

FLAVIO PREVIALE
Università di Torino

Il problema che verrà molto parzialmente trattato in questa nota è il seguente: trovare semplici condizioni sufficienti affinchè un linguaggio formale soddisfi alle proprietà logiche di base, in particolare: validità e completezza, coerenza, eliminabilità della regola di taglio. Si può arguire, già dai limitati risultati qui esposti, che non è ragionevole, almeno per quanto riguarda le ultime due proprietà, cercare delle condizioni necessarie, oltre che sufficienti. D'altra parte è naturale che una ricerca di semplici condizioni sufficienti vada integrata con quella di semplici controesempi per tali condizioni. In questa nota ci occuperemo solo della restrizione del precedente problema alla logica proposizionale. Ciò presenta tra l'altro il vantaggio che non sarà necessario, come nel caso generale, elaborare una teoria astratta dei linguaggi formali, a cui riferire il problema stesso. Premesso infatti che per logica proposizionale intendiamo qui quella ordinaria, ossia dei connettivi ordinari (e non infinitari), vi è a mio avviso un unico modo ragionevole di generalizzare la nozione di linguaggio proposizionale, ed è quello di considerare il caso di linguaggi con formule non necessariamente ben fondate, cioè tali che il rispettivo albero delle sottoformule non sia necessariamente finito. Come vedremo, proprio la buona fondatezza del linguaggio (ossia delle sue formule) gioca un ruolo di primo piano nella dimostrazione delle proprietà di coerenza e di eliminabilità della regola di taglio.

In quanto segue faremo riferimento alla formalizzazione della logica proposizionale classica mediante *sequenze*: sistema LK (proposizionale) di Gentzen. Con L verrà indicato il corrispondente linguaggio (possibilmente non ben fondato).

E' utile estendere la nozione di derivabilità in LK da sequenze finite a sequenze infinite. A tal fine basta convenire che una sequenza infinita $\Gamma \vdash \Delta$ è derivabile in LK se e solo se per certi sottoinsiemi finiti Γ_0 e Δ_0 di Γ e Δ, $\Gamma_0 \vdash \Delta_0$ è derivabile in LK.

Una espressione della forma T.A o F.A, dove A è una formula di L verrà detta una *formula valutata* di L. Se Γ e Δ sono insiemi di formule, porremo $T.\Gamma = \{T.C : C \in \Gamma\}$, $F.\Delta = \{F.D : D \in \Delta\}$. L'insieme di formule valutate $T.\Gamma \cup F.\Delta$ verrà detto *associato* alla sequenza $\Gamma \vdash \Delta$.

Definizione 1. L'insieme $T.\Gamma \cup F.\Delta$ è detto [*analiticamente*] *consistente* allorchè la sequenza $\Gamma \vdash \Delta$ non è derivabile [senza taglio].

Supporremo note le nozioni di *valutazione* e di *valutazione parziale* (Cfr. Schütte, op. cit.).

Definizione 2. Un insieme S di formule valutate è [largamente] soddisfacibile sse S è incluso in una valutazione [parziale]. Una sequenza $\Gamma \vdash \Delta$ è [strettamente] valida sse l'insieme associato $T.\Gamma \cup F.\Delta$ non è [largamente] soddisfacibile.

Il seguente teorema, la cui dimostrazione è standard, vale senza alcuna restrizione sul linguaggio L (in particolare questo può essere non ben fondato).

Teorema 1 (*validità e completezza secondo Schütte*). Se ne possono

dare due forme, duali l'una dell'altra.

I Forma) $\Gamma \vdash \Delta$ è derivabile [senza taglio] sse $\Gamma \vdash \Delta$ è [strettamente] valida.

II Forma) S è [analiticamente] consistente sse S è [largamente] soddisfacibile.

Definizione 3. L è *consistente* sse la sequenza vuota non è derivabile in LK.

Osservazione. Per il Teorema 1, la consistenza di L equivale alla seguente proprietà semantica: esiste una valutazione (totale).

Definizione 4. L ammette la proprietà di eliminazione del taglio sse ogni sequenza derivabile in LK è derivabile senza taglio in LK.

Osservazione. La proprietà di eliminazione del taglio equivale (tra l'altro) alla seguente proprietà semantica: un insieme di formule valutate largamente soddisfacibile è soddisfacibile. Essa è quindi implicata dalla seguente proprietà, *proprietà di Schütte*: una valutazione parziale è sempre inclusa in una valutazione.

Si osservi pure che la proprietà di eliminazione del taglio implica la consistenza di L.

Teorema 2 (*eliminazione del taglio*). Un linguaggio ben fondato ammette la proprietà di eliminazione del taglio. In particolare esso è consistente.

Dimostrazione. E' sufficiente provare la proprietà di Schütte. Ciò non presenta alcuna difficoltà.

Allo scopo di provare che l'ipotesi di buona fondatezza di L è essenziale nella dimostrazione del teorema di eliminazione del taglio, costruiamo un particolare linguaggio non ben fondato.

Sia L un ordinario linguaggio proposizionale (ben fondato), B una formula di L. Denotiamo con L^B il linguaggio non ben fondato il cui insieme di formule è l'unione dei seguenti tre insiemi:

1) l'insieme di tutte le formule di $\underline{\underline{L}}$;

2) una singola formula A avente la proprietà di coincidere con $A \to B$ (trascuriamo qui l'irrilevante questione di come un tale oggetto, chiaramente infinito, può essere matematicamente definito);

3) l'insieme di tutte le formule che può essere ottenuto a partire dalle formule elencate in (1) e (2) applicando iteratamente i connettivi logici (cosicchè l'insieme stesso risulti chiuso rispetto all'applicazione dei connettivi).

Teorema 3. La sequenza $\vdash B$ è derivabile in $\underline{\underline{L^B K}}$. Inoltre, in ciascuno dei seguenti tre casi (mutuamente esclusivi, in quanto $\underline{\underline{L}}$ è consistente) vale quanto corrispondentemente affermato:

Caso 1) $\vdash B$ è derivabile in $\underline{\underline{LK}}$. In tal caso $\underline{\underline{L}}^B$ ammette la proprietà di eliminazione del taglio.

Caso 2) Nè $\vdash B$, nè $B \vdash$ è derivabile in $\underline{\underline{LK}}$. In tal caso $\underline{\underline{L}}^B$ non ammette la proprietà di eliminazione del taglio ($\vdash B$ non è derivabile senza taglio). D'altra parte $\underline{\underline{L}}^B$ è consistente.

Caso 3) $B \vdash$ è derivabile in $\underline{\underline{LK}}$. In tal caso $\underline{\underline{L}}^B$ è inconsistente.

Dimostrazione. Cominciamo col dare una derivazione in $\underline{\underline{L^B K}}$ (con taglio) della sequenza $\vdash B$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A \qquad B \vdash B}{A,\ A \to B \vdash B}}{A \vdash B}}{\vdash A \to B}}{\vdash A} \qquad\qquad A \vdash B}{\vdash B}$$

Le tre affermazioni dei Casi 1-3 possono poi essere facilmente provate usando le caratterizzazioni semantiche delle nozioni sintattiche coinvolte.

Caso 1) E' sufficiente provare che ogni valutazione parziale V^B di $\underline{\underline{L}}^B$ è inclusa in una valutazione di $\underline{\underline{L}}^B$. Chiaramente la restrizione di V^B a $\underline{\underline{L}}$ è inclusa in una valutazione V di $\underline{\underline{L}}$. Poichè $\vdash B$ è derivabile in $\underline{\underline{LK}}$, $F.B \notin V$, perciò $T.B \in V$. Si verifica allora facilmente che V genera canonicamente una valutazione di $\underline{\underline{L}}^B$ (contenente in particolare T.A) e che tale valutazione estende V^B (si osservi che se fosse $F.B \in V$, siccome $A \equiv A \to B$, a V non potrebbe venir coerentemente aggiunto nè T.A nè F.A).

Caso 2) $\vdash B$ non è derivabile senza taglio in $\underline{\underline{L^B K}}$, altrimenti sarebbe già derivabile in $\underline{\underline{LK}}$. Quindi $\underline{\underline{L}}^B$ non ha la proprietà di eliminazione del taglio. D'altra parte $\underline{\underline{L}}^B$ è consistente. Ciò segue dal fatto che che $\underline{\underline{L}}^B$ ammette una valutazione. In effetti, poichè $B \vdash$ non è derivabile in $\underline{\underline{LK}}$, esiste una valutazione V di $\underline{\underline{L}}$ contenente T.B; come prima V genera canonicamente una valutazione di $\underline{\underline{L}}^B$.

Caso 3) Poichè $\vdash B$ a $B \vdash$ sono entrambe derivabili in $\underline{\underline{L^B K}}$, la sequenza vuota $\vdash$ è derivabile in $\underline{\underline{L^B K}}$ (l'argomento complessivo con cui viene derivata $\vdash$ è essenzialmente il paradosso del mentitore).

Bibliografia.

SCHÜTTE, Kurt, Syntactical and semantical properties of simple type theory, Journal of Symbolic logic, 25, 1960, pp. 305-326.