Estratto da

M. Barra e A. Zanardo (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Volume 5, Roma 6-9 aprile 1988.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

L'INSEGNAMENTO DELLA LOGICA NELLE SCUOLE MEDIE SUPERIORI

FERDINANDO ARZARELLO
Università di Torino

1. Obiettivi logici nel biennio

Mi pare interessante sottolineare, tra gli altri, i seguenti obiettivi di tipo logico, contenuti nei nuovi programmi per il biennio delle superiori (programma A):

A. Acquisire capacita´ di deduzione (...).

B. (...) Sviluppare attitudini a rappresentare e quindi interpretare dati.

C. Operare con modelli deterministici e non deterministici.

D. Acquisire la capacita´ di rappresentare e risolvere semplici problemi con metodi, linguaggi, strumenti informatici.

E. Acquisire il rigore espositivo e la comprensione della funzione necessaria del rigore logico e linguistico, anche attraverso la programmazione informatica.

Dalla lettura di tali obiettivi emerge chiaramente e correttamente che la logica nelle superiori va intesa e insegnata a due livelli, entrambi necessari:

a)(livello 0) La logica nella matematica, cioe´ il fatto che facendo matematica di continuo si usano in modo piu´ o meno cosciente strumenti e concetti logici. In questo senso la logica e´ nel linguaggio stesso della matematica: l´organizzazione di argomentazioni e ragionamenti matematici costituisce una base essenziale per l´approccio alla logica, un po´ come il disegno e´ la base per la pittura.

b)(livello 1) La logica come metamatematica, cioe´ come coscientizzazione, organizzazione esplicita e studio dei metodi argomentativi e di ragionamento usati di fatto in matematica. La logica si presenta qui essenzialmente come metalinguaggio, come riflessione cosciente, scientifica e sistematica su quanto avviene al livello 0.

Dal punto di vista dell´apprendimento, al livello 0 sono coinvolte soprattutto le abilita´ cognitive degli allievi, mentre al livello 1 giuocano un ruolo importante anche quelle metacognitive.

2. Aspetti cognitivi e metacognitivi

I due livelli sono essenziali per un approccio alla formalizzazione della matematica che non sia ridotto a puro formalismo (come rischia di succedere quando il livello 1 viene attivato senza gli opportuni collegamenti con il livello precedente). La conquista delle problematiche e della potenza della formalizzazione in matematica costituisce forse l'obiettivo piu' ambizioso per l'educazione matematica in tutto l'arco delle superiori e la logica costituisce uno strumento essenziale per la sua acquisizione.

Per un insegnante che si ponga tale obiettivo, il punto chiave e' il rapporto tra i due livelli e le corrispondenti abilita' cognitive e metacognitive. Si tratta necessariamente di un intervento nel lungo periodo che mira a fare emergere e poi consolidare negli allievi uno stile di lavoro e di approccio ai vari problemi matematici, bene formulato nell'obiettivo E dei nuovi programmi (cfr. sopra). Va detto subito che tale intervento dovra' partire necessariamente dall'articolazione del sapere matematico in vari campi di problemi, in modo che effettivamente la logica serva a fare maturare l'abitudine al rigore e alla riflessione metacognitiva sui vari campi e non si presenti invece come un nuovo pezzo di sapere matematico, piu' o meno collegato agli altri piu' tradizionali.

Cio' che occorre quindi e' una riorganizzazione dei vari campi di problemi, tradizionalmente presenti (o perlomeno non assenti) nelle superiori, per favorire l'acquisizione complessiva di un tale obiettivo.

Il punto e', come sottolinea Prodi nel suo intervento, di introdurre nella scuola esempi di problemi matematici logicamente significativi.

Quanto segue e' un elenco schematico di esempi, intesi come primo tentativo per costruire una banca dati su campi di problemi di tipo logico.

3. La logica puo' essere utile anche la' dove uno non se l'aspetta.

Consideriamo, per es., il campo di problemi, molto tradizionale: calcolo algebrico, equazioni e disequazioni.

Il mondo delle espressioni e delle equazioni puo' essere riorganizzato utilizzando i diagrammi di flusso e giungendo via via a scoprire le regole con cui e' manipolato un calcolo equazionale. Equazioni, identita', equazioni parametriche, ecc. si configurano in una veste matematicamente significativa, cioe' come formule matematiche contenenti dei quantificatori nascosti. Risolvere un'equazione vuol dire verificare se un enunciato esistenziale puro e' vero; trovare che e' vero il corrispondente enunciato universale significa scoprire che l'equazione e' un'identita'; introdurre parametri nelle equazioni vuol dire passare a formule piu' complesse, con un quantificatore universale seguito da uno esistenziale.

Un secondo tipo di problemi logicamente interessanti trova ampio spazio in algebra, vale a dire la questione della velocita' e complessita' dei calcoli rappresentati dalle formule algebriche. Semplici considerazioni possono guidare alla manipolazione delle espressioni allo scopo di rendere piu' veloci i calcoli, ad es. minimizzando il numero di operazioni da eseguire per il computo di un polinomio, assegnando via via i valori all'indeterminata, oppure per calcolare un numero assegnato in una data base, oppure ancora per risolvere effettivamente un'equazione di secondo grado

con numeri reali assegnati "a caso" , ecc..

Un obiettivo metacognitivo non irrilevante in questo contesto e' che i calcoli vanno organizzati prima di essere eseguiti e che a seconda di come si presentano i dati o di quali obiettivi ci si pone, possono essere organizzati in modo diverso. Ad esso e' strettamente collegato quello che riguarda il controllo sui valori numerici che si troveranno, dopo di avere eseguito manipolazioni algebriche (ed e' interessante osservare ed intervenire sulle argomentazioni e i ragionamenti -al livello 0- con cui gli allievi li giustificano o meno).

4. La logica come supporto a ragionamenti "locali".

Alcuni campi di problemi possono supportare ragionamenti logici anche molto sofisticati (rimanendo sempre a livello 0 pero').

La combinatoria costituisce in questo senso un terreno affascinante, anche se lo sforzo didattico per riuscire a trovare vie non troppo pesanti per scoprire certe proprieta' non e' indifferente. Comunque problemi su percorsi, grafi, ecc. possono essere spesso affrontati come giochi in cui l'elaborazione di strategie opportune (che di fatto gli allievi trovano) permette di esplicitare forme di ragionamento anche complesse senza che gli aspetti formali lo rendano incomprensibile. Ad es., il teorema di Ramsey nel caso finito puo' essere fonte di ragionamenti in cui gli allievi sono naturalmente portati ad utilizzare modelli concettuali nuovi e potenti, come il principio dei cassetti, quello d'induzione, ecc.. Anche qui e' interessante il lavoro di coscientizzazione di tali modelli, nel quadro dello sviluppo delle abilita' metacognitive di controllo su cio' che si fa, cui si accennava sopra.

L'aritmetica e la geometria offrono, come e' ovvio, esempi in cui tali abilita' vengono stimolate. Si pensi al problema delle definizioni e del gioco raffinato che si puo' condurre con gli allievi tra chi crede di definire un oggetto che ha in mente e chi gli continua ad esibire controesempi clamorosi che mettono in crisi la supposta definizione. Oppure all'esplicitazione in termini rigorosi di ragionamenti e argomentzioni fatte nel linguaggio naturale (qui si scoprira' quanto aristotelici si sia quando si parla: l'esplicitazione rigorosa dei ragionamenti intuitivi che si fanno in matematica richiede spesso la traduzione dai modelli vicini alla sistemazione datane nei sillogismi ai modelli formali della logica matematica moderna).

Si deve osservare che uno dei metodi piu' naturali per lavorare con gli allievi in questo modo e' di dare ampio spazio all'interazione in classe. Fare logica significa anche dare un'immagine diversa della matematica, come di una disciplina nella quale non solo si fanno calcoli ma dove si ragiona, si discute e si argomenta. E' inutile ricordare l'effetto dannoso che ha sulle prestazioni matematiche degli allievi la disabitudine a queste forme di controllo su cio' che si fa.

5. Ambienti logici.

Gli esempi che precedono costituiscono alcuni suggerimenti per quella base su cui avviare il passaggio dal livello 0 al livello

1, cui si accennava.

Un approfondimento in questo senso e quindi un'esplicitazione precisa della logica della matematica (in particolare del calcolo proposizionale e di quello dei predicati) va pero' affrontata in un contesto logico molto definito, in modo che le interferenze della lingua naturale -ben piu' complessa ed equivoca, come e' noto, di quella logico/matematica- siano ridotte al minimo.

In questo senso e' opportuno lavorare in ambienti logici, cioe' in ambienti di apprendimento in cui la situazione stessa funga da autoregolatore rispetto agli equivoci e ai conflitti che si verranno necessariamente a creare tra i modelli intuitivi mutuati dal linguaggio naturale e quelli formalizzati -non necessariamente in consonanza con i primi- propri della logica matematica.

Faro' due esempi estremi per illustrare quanto detto.

Il primo riguarda l'utilizzo del PROLOG e di opportune banche dati come strumento per rappresentare e risolvere problemi elementari di matematica, ad es. i piu' semplici, sia aritmetici che geometrici, del libro di Polya, La scoperta matematica, Feltrinelli, Milano 1971. Il dover tradurre in un linguaggio opportuno i dati, le incognite e gli elementi di conoscenza necessari per giungere alle soluzioni di un problema pone l'allievo in modo naturale in una situazione diversa da quella usuale, quando si attivano automaticamente procedure standard, con conseguenti perdite di controllo in caso di scacco immediato. Nel nostro caso, invece, la riflessione su cio' che sta avvenendo e la sua esplicitazione -con i conseguenti risvolti metacognitivi- vengono attivate in modo naturale e sono inoltre regolate da meccanismi di controllo automatico -il computer su cui si implementa il PROLOG- in cui l'errore non e' piu' uno scacco ma un semplice momento, quasi inevitabile, della procedura. Senza contare che la rappresentazione di un problema in un linguaggio come il PROLOG ne costituisce una traduzione in un frammento interessante di logica, che si impara cosi' concretamente ad usare.

Il secondo esempio invece e' simmetrico rispetto al precedente e si rifa' ai noti lavori di R.Smullyan su furfanti c cavalieri, i primi che dicono sempre il falso, i secondi sempre la verita' (cfr. il volume dell'autore Qual e' il titolo di questo libro?, Zanichelli, Bologna 1982). Tali storielle, che tra l'altro sono molto gradite dagli allievi, possono costituire un ambiente logico ben definito in cui si chiariscono i significati dei vari connettivi e le regole di deduzione ad essi legate. Qui la logica puo' essere utilizzata come strumento per scoprire, chiarire, sistemare l'interazione dell'allievo con i suoi modelli intuitivi di ragionamento, mutuati dal linguaggio naturale. Anche qui, il lavoro in un ambiente logico ben definito -anche se immaginario come e' l'isola dei furfanti e dei cavalieri- presenta forti momenti di autocontrollo che evitano di scivolare inevitabilmente in equivoci indotti da un uso incontrollato del linguaggio naturale. (Un esempio storicamente interessante di ambienti logici si trova in molti lavori di Lewis Carroll).

6. Asserire e provare

Una delle differenze piu' importanti in matematica, sia da un punto di vista logico che pedagogico, e' quella tra asserire e provare una proposizione (essa fu stabilita da G.Frege piu' di cento anni fa).

Il credo epistemologico implicito in molti allievi (e insegnanti) e' che la matematica sia costituita essenzialmente da asserzioni; infatti essa e' il regno dei calcoli e i calcoli non sono altro che una serie di asserzioni autoevidenti. Una conseguenza di questo modo di vedere e' che non si vengono a determinare negli allievi motivazioni sensate per le dimostrazioni; tutt'al piu' possono avvertire l'esigenza di compiere delle verifiche -le asserzioni appunto si verificano- preferibilmente usando il computer, che sicuramente "non sbaglia" (anche questo fa parte del credo sulla matematica come insieme di asserzioni). Le credenze degli allievi su cio' che la matematica e' possono costituire un serio ostacolo per il conseguimento degli obiettivi ricordati all'inizio, che coinvolgono le loro abilita' logiche nonche' la sfera metacognitiva. Ancora una volta si tratta di un processo di maturazione nel lungo termine, che deve essere avviato gia' a partire dalla scuola media.

Esemplifichero' su di un caso banale ma istruttivo, vale a dire la proprieta' che la somma degli angoli interni di un triangolo vale 180°. Nella scuola dell'obbligo e' pensabile di suddividere il lavoro in due tappe. Nella prima si raccolgono i dati di misurazioni empiriche eseguite dalla classe su vari triangoli, le si confrontano, ecc. Nella seconda fase, si cominciano a fare previsioni, a formulare ipotesi sul fatto che la somma degli angoli interni sia o meno la stessa per tutti i triangoli e sul suo valore, nel caso che sia invariante; si cercano controesempi alle ipotesi fatte, li si discutono, ecc.. Via via, con controesempi si scartano le ipotesi false e si formula l'ipotesi corretta. A questo punto pero' ci si deve rendere conto che le misure empiriche non bastano piu', che non si puo' rimanere sul piano delle verifiche e quindi delle asserzioni: occorre dimostrare !

E' questo il passo piu' delicato, che coinvolge i processi metacognitivi cui si accennava sopra ma che, solo, puo' permettere il conseguimento degli obiettivi del programma di logica nelle superiori.

Si puo' delineare cosi' il seguente schema: opportune situazioni problematiche, sufficientemente ricche, sono il punto di partenza per portare la classe, ad esempio con metodi di interazione di gruppo, a sviluppare argomentazioni e confutazioni sul problema trattato, come nell'esempio della somma degli angoli interni. Cio' dovrebbe, sia pur con lentezza e difficolta' estreme, fare maturare un'abitudine a riflettere, a discutere in matematica, e non solo a fare calcoli; cioe' dovrebbe porre le premesse per avvertire l'esigenza di dimostrare, di usare un linguaggio preciso e rigoroso, ecc.

Il lavoro didattico verso la matematica come sistema ipotetico-deduttivo puo' quindi essere scandito in tre grossi momenti:

a) Una preparazione locale nella media, con un approccio intuitivo-manipolativo, in cui pero' gli elementi di argomentazione/ dimostrazione sopra accennati vengano gia' impostati.

b) Un primo fissaggio nel biennio, con la riflessione razionale e l´esplicitazione delle argomentazioni matematiche, dei processi e dei meccanismi dimostrativi, che si sviluppano nel lavoro di interazione di gruppo, utilizzando eventualmente ambienti logici per studiare scientificamente tali meccanismi.

c) Una sistemazione piu´ globale in alcuni sistemi ipotetico-deduttivi nel triennio.

7. Argomenti per il triennio

Il punto c) precedente puo´ essere ulteriormente specificato con gli esempi seguenti, che vengono presentati esclusivamente per dare un punto di partenza e stimolare la discussione e non hanno alcuna pretesa di completezza:

a) Alcuni sistemi ipotetico deduttivi di tipo matematico (Geometria, Aritmetica, Algebra, Analisi) e logico/informatico (Calcoli logici legati a sistemi implementabili su computer). Il rapporto sistemi formali - modelli e´ tutto da fare didatticamente e puo´ presentare spunti interessanti. Un altro taglio, relativamente meno ignoto, riguarda le connessioni tra storia della logica e storia del pensiero scientifico e matematico in particolare.

b) La manipolazione dei quantificatori (con le alternanze "per ogni...esiste...", "esiste...per ogni...", "per ogni...esiste...per ogni...") in contesti infiniti. Quindi elementi di teoria intuitiva degli insiemi, soprattutto di insiemi di punti sulla retta e sul piano, con le importanti connessioni con l´Analisi, da un lato, e con la filosofia della scienza, dall´altro.

c) La rivisitazione dell´aritmetica con l´aiuto di un PC. L´aritmetica offre spunto per studiare concretamente alcune funzioni elementari, per approcciare il concetto di calcolabilita´, di induzione ecc. Cio´ puo´ porre le basi per affrontare, sia pure intuitivamente, problemi di decidibilita´ e indecidibilita´, di prove probabilistiche ecc.