Estratto da

M. Barra e A. Zanardo (a cura di), *Atti degli incontri di logica matematica* Volume 5, Roma 6-9 aprile 1988.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

L'INSEGNAMENTO DELLA LOGICA NELLE SCUOLE MEDIE SUPERIORI

CARLO CELLUCCI
Università di Roma "La Sapienza"

1. Gli Organizzatori del XII Incontro di Logica Matematica ci hanno proposto alcuni quesiti come traccia per questa II Tavola rotonda. Alcuni di tali quesiti, però, sembrano ispirarsi ad una concezione della logica e del suo rapporto con la matematica che non mi trova consenziente. Prima di rispondere ad essi, perciò, mi sembra opportuno chiarire qual è la posizione generale da cui discenderanno le mie risposte.

Io non ritengo che la logica - allo stato attuale - sia una parte della matematica, né della filosofia, né tanto meno dell'informatica o della linguistica. Credo piuttosto che la logica, grazie al lavoro di pionieri come Frege, Russell ecc., si sia costituita ormai in disciplina autonoma, con sue problematiche e metodi suoi propri, esattamente come, per esempio, nel '600 la fisica, grazie al lavoro di pionieri come Galileo, Newton ecc., si costituì in disciplina autonoma.

Dove il costituirsi in disciplina autonoma non deve essere inteso semplicisticamente come l'affrancarsi dalla matrice filosofica. E' una ben strana posizione quella di chi tende ad interpretare la vicenda del sorgere delle varie scienze dal '600 in poi come una storia di guerre di indipendenza contro la filosofia: salvo poi riscoprire i problemi filosofici all'interno di tali scienze, pudicamente ribattezzati col nome di 'problemi metodologici'. Il costituirsi in disciplina autonoma dev'essere inteso invece, a mio parere, solo nel senso di una divisione del lavoro, e questo vale in particolare anche per la logica.

Di conseguenza la logica, sebbene sia una disciplina autonoma, non per questo è una disciplina separata. Come la matematica ha mutuato molte sue problematiche da vari fenomeni ed attività umane - che vanno dai fenomeni astronomici al gioco d'azzardo, dalla fabbricazione dei pavimenti a mosaico al problema della prospettiva nella pittura - così la logica mutua molte sue problematiche da varie attività umane, come il formare concetti, fare inferenze corrette, costruire discorsi coerenti ecc.. In quanto tale la logica entra naturalmente in rapporto con altre discipline che hanno a che fare in vario modo con quelle stesse attività: dalla matematica all'informatica, dalla linguistica al diritto e, <u>last but not least</u>, alla filosofia.

Naturalmente l'autonomia ha i suoi costi, in particolare crea problemi di collocazione culturale:

> "Il gusto sia per il sistema che per l'oggettività è il peccato originale del logico formale. Egli lo paga con frustrazioni costanti e vivendo spesso la vita di un paria intellettuale [...].Il logico formale ottiene poca simpatia in cambio delle sue frustrazioni. Egli viene considerato troppo rigido dai suoi colleghi filosofi e troppo speculativo dai suoi amici matematici. La vita da paria intellettuale può essere un risultato in parte del temperamento e in parte della giovinezza della professione logica. La sfortunata mancanza di una vasta attrattiva della logica può, però, protrarsi, in parte perché ben poche delle tecniche ben stabilite della matematica sembrano applicabili per trattare seri problemi di logica" ([W] p. 241).

2. Se le cose stanno nei termini da me prospettati, allora il quesito propostoci dagli Organizzatori - se la

logica debba identificarsi con la riflessione sulla matematica oppure sia una parte della matematica - è alquanto unilaterale perché sembra suggerire che la logica debba essere necessariamente una di queste due cose. In realtà la logica non è né l'una né l'altra. Non è <u>solo</u> riflessione sulla matematica perché è anche riflessione su molte altre cose. Non è una parte della matematica perché l'unico tentativo serio e filosoficamente dignitoso di ridurre la logica alla matematica, cioè il programma hilbertiano, non ha avuto successo.

Il programma hilbertiano era estremamente ambizioso. Come osserva Bernays per Hilbert la matematica era

> "la teoria generale delle relazioni e delle proprietà formali [...] di modo che [...] ogni costruzione logica di pensieri, per la struttura esteriore che necessariamente le è connessa, cade nell'ambito della trattazione matematica" ([Be] p. 10).

Al panlogicismo di Frege e Russell si contrappone il panmatematismo di Hilbert:

> "tutto ciò che può essere oggetto del pensiero scientifico [...] cade sotto il metodo assiomatico e per suo tramite sotto la matematica [...] Nel segno del metodo assiomatico la matematica sembra chiamata ad un ruolo di guida in tutto ciò che è scienza" ([H] p. 188);
> "tutta la nostra cultura attuale, nella misura in cui poggia sulla penetrazione intellettuale e sull'asservimento della natura, trova il suo fondamento nella matematica" ([H] p. 309).

Queste affermazioni sono forse un segno dei tempi, espressione di quella volontà di potenza che, secondo alcuni (v. [Z]), avrebbe animato i matematici a cavallo dei due secoli. Sta di fatto, comunque, che Hilbert fu l'unico che riuscì a tradurre questa volontà di potenza in un serio programma filosofico che dava dignità alla pretesa di considerare la logica come una parte della matematica:

"la matematica dispone di un contenuto assicurato indipendentemente da ogni logica [...] come precondizione per l'uso di inferenze logiche dev'essere già dato qualcosa nella rappresentazione: certi oggetti extra-logici che esistono intuitivamente come qualcosa di immediato" ([H] p. 243).

In termini di questi oggetti extra-logici Hilbert riteneva di poter dare una giustificazione della logica. Sfortunatamente per lui, però, il programma si rivelò irrealizzabile.

3. Sul piano pedagogico il fatto che la logica sia una disciplina autonoma ha come conseguenza che essa dovrebbe essere insegnata nella SSS in modo autonomo, cioè con un ciclo di lezioni dedicate specificamente ad essa. Questo non costituirebbe una novità, ma sarebbe piuttosto un ritorno alla tradizione. Non verranno ricordate mai abbastanza le parole di Mill:

"La mia stessa consapevolezza ed esperienza [...] mi fecero apprezzare [...] il valore di una dimestichezza pratica, fin da ragazzi, con la logica scolastica. Nulla nel corso della mia educazione è stato [...] altrettanto determinante ai fini della mia capacità di riflessione [...]. Sono convinto che nessun'altra cosa [...] riesca a formare pensatori rigorosi [...] La vantata influenza degli studi matematici è nulla rispetto a quell'altra, giacché nei procedimenti della matematica non si presenta nessuna delle reali difficoltà del ragionamento logico corretto" ([Mi] pp. 14-15).

Queste parole dovrebbero essere meditate attentamente dai partecipanti a questo Incontro, nel cui ambito non ho sentito fare finora alcuna proposta che vada nel senso dell'insegnamento della logica come disciplina autonoma. Ho sentito parlare, piuttosto, di un insegnamento della matematica che cerchi di sottolinearne la logica intrinseca ('la logica nella matematica'), o tuttalpiù dell'insegnamento di alcune nozioni elementari di logica come strumento per esprimere le proposizioni matematiche.

4. La prima di queste proposte (la logica nella matematica) è tutt'altro che filosoficamente ingenua: le sue radici vanno ricercate in una corrente di pensiero antilogica, che comincia almeno con Descartes e prosegue con Malebranche, Locke fino a Whewell, Poincaré e oltre, la quale sostiene la 'naturalità' della logica: la logica come disciplina è sterile, lo sviluppo delle capacità logiche deve risultare piuttosto dall'esercizio delle varie attività razionali di cui solo a posteriori si può cercare di cogliere la 'logica' intrinseca (e non è detto poi che sia utile farlo). Ho discusso recentemente i difetti di questa corrente antilogica (v. [Ce]) e non ripeterò qui le mie critiche.

Non posso, però, evitare di rilevare come a questa corrente antilogica sembri ispirarsi un altro quesito propostoci dagli Organizzatori. Tale quesito parte dall'affermazione che quasi tutti concordano che la logica si può ricavare solo a posteriori, e che solo il buon senso e l'analisi di esempi permette di distinguere tra ragionamenti corretti e ragionamenti sbagliati, e ci chiede se se ne debba concludere che la formalizzazione è inutile. L'affermazione su cui si basa il quesito sembra dare per scontato che le tesi della corrente antilogica abbiano finito per prevalere e che 'quasi tutti' concordino su esse.

Ora, in primo luogo, i limiti di tale corrente sono stati messi in luce, oltre che da me, da personaggi un po' meno oscuri che rispondono ai nomi di Leibniz, Bolzano, Frege ecc.. In secondo luogo, l'affermazione in questione sembra trascurare il lavoro sulla correttezza del ragionamento fatto dai logici negli ultimi venti anni, dalle ricerche di Prawitz sulla nozione di argomentazione valida a quelle di Fine sulla semantica del ragionamento su oggetti qualsiasi. Si tratta di ricerche che, ahimè, non trovano riscontro nei manuali correnti di logica né presumibilmente lo troveranno nell'immediato futuro.

Si ha qui un esempio della perdita che si avrebbe identificando la logica con una parte della matematica. Tale identificazione porterebbe a coltivare solo certi aspetti della logica e a trascurarne altri egualmente importanti e fondamentali: per esempio, a studiare la nozione di modello, ma non quelle di definizione e di dimostrazione. Non è un caso che le ricerche sulla correttezza del ragionamento siano state condotte da logici come Prawitz e Fine di provenienza filosofica piuttosto che matematica: al matematico capita di fare dimostrazioni, raramente di riflettere su di esse considerandole a loro volta come oggetti matematici.

5. La seconda proposta, quella di insegnare alcune nozioni elementari di logica come strumento per esprimere proposizioni matematiche, sembra avere anch'essa precedenti autorevoli, per esempio in Peano:

> "nel Formulario la logica matematica è solo uno strumento per esprimere e trattare le proposizioni della matematica comune: non è fine a sé stessa" ([P] p. 391).

La giustificazione di questo uso strumentale della logica matematica stava nell'ambizioso programma di Peano:

> "E' ora possibile pubblicare un Formulario di matematica che contenga tutte le proposizioni conosciute nelle scienze matematiche, tutte le dimostrazioni, tutti i metodi. Queste, scritte in simboli, occupano poco posto [...]. Ogni professore potrà adottare questo Formulario come testo, poiché esso deve contenere tutte le proposizioni e tutti i metodi" ([P] p. 199).

Per rendersi conto di quanto poco realistico fosse questo programma basta confrontarlo con una valutazione recente dello stato dei sistemi formali della logica:

> "I sistemi formali della logica furono creati per essere studiati, non per essere usati. E' un interessante esercizio cercare di formalizzare (ad esempio) il libro di Hardy e Wright sulla teoria dei numeri nell'aritmetica di Peano (PA). Ogni logico converrà che teoricamente lo si può fare, ma farlo in pratica è troppo disagevole [...]. Questo non ha imbarazzato i logici che (almeno dopo i Principia Mathematica) non sono stati interessati a formalizzare realmente alcunché, ma solo alla possibilità di farlo" ([Bs] pp. 53-54).

Qui l'affermazione che "teoricamente lo si può fare" si riferisce solo alla formalizzazione dei teoremi, non delle dimostrazioni. Se un teorema è dimostrato informalmente nella teoria dei numeri, allora la formula che lo esprime è dimostrabile formalmente in PA, ma la dimostrazione formale in generale non è una traduzione di quella informale ma si basa su princìpi differenti. Non "tutte le dimostrazioni, tutti i metodi" della teoria dei numeri sono riproducibili in PA. Per esempio l'algoritmo euclideo per trovare il massimo comun divisore non è rappresentabile in PA e dev'essere sostituito con un algoritmo di tipo differente:

> "PA non consente la rappresentazione intensionalmente corretta di tutti gli algoritmi della teoria dei numeri in un modo naturale" ([Bs] p. 56).

La proposta di insegnare alcune nozioni elementari di logica come strumento per esprimere proposizioni matematiche sembra perciò una tardiva trasposizione sul piano pedagogico di un programma teorico rivelatosi irrealizzabile con gli attuali sistemi formali. Che in futuro si possano trovare sistemi formali di nuovo tipo, adeguati per rappresentare "tutte le dimostrazioni, tutti i metodi", è un tema di ricerca, non un'ipotesi pedagogica su cui si possa basare l'insegnamento della logica nella SSS.

6. Le parole di Mill già ricordate sono di una grande attualità pedagogica. In un mondo come quello attuale - in cui in quasi tutti i campi le conoscenze acquisite diventano obsolete nel giro di pochi anni rendendo così necessario uno sforzo di aggiornamento permanente - scopo della SSS e in parte dell'Università non può essere semplicemente quello di fornire nozioni destinate ad essere rapidamente superate, ma dev'essere piuttosto quello di sviluppare la capacità di riflessione - la sola che è comunque indispensabile per riconvertirsi a nuove conoscenze in discipline già stabilite, o addirittura a nuove discipline. Visto in questa prospettiva l'insegnamento della logica nella SSS appare non solo giustificato, ma di grande rilievo: più della matematica, come asseriva Mill, esso può contribuire a sviluppare tale capacità.

Quali argomenti di logica insegnare nella SSS? Trattare a quel livello della teoria della ricorsione o del teorema di incompletezza di Gödel può essere controproducente perché la trattazione rimarrebbe necessariamente parziale ed allusiva: non c'è niente di più frustrante per lo studente della descrizione inadeguata di uno strumento che non sarà in grado di comprendere pienamente né di usare. Del resto non c'è bisogno di reinventare l'ombrello: ci sono Paesi come gli USA che hanno un'esperienza ormai più che trentennale di insegnamento della logica al livello college - apparentemente confrontabile con quello della SSS - come testimoniano i numerosissimi manuali disponibili a tale scopo.

Che cosa contengono tali manuali? Semplicemente gli elementi della logica proposizionale e predicativa, escludendo però risultati metateorici di una certa complessità come il teorema di completezza. Il loro intento è sostanzialmente quello di insegnare l'analisi logica delle proposizioni e le tecniche di inferenza, senza presupporre alcuna conoscenza matematica e senza ricorrere ad esempi matematici salvo occasionalmente ed in modo inessenziale. Lo sviluppo della riflessione attraverso la considerazione delle nostre strutture linguistiche ed inferenziali è lo scopo ultimo di tali manuali:

> "Seguire un corso di logica migliorerà realmente la vostra capacità di ragionamento? Lo dovrebbe, sotto almeno due aspetti importanti. In primo luogo, imparerete a riconoscere e usare certe forme molto comuni di inferenza logica corretta, e giungerete a riconoscere ed <u>evitare</u> certi comuni errori logici [...]. In secondo luogo, la logica dovrebbe aumentare la vostra capacità di costruire estese <u>catene</u> di ragionamenti, e di trattare problemi più complessi [...]. In aggiunta ai vantaggi pratici [...] , però, c'è anche un lato teorico nello studio della logica. Imparerete non solo <u>come</u> ragionare correttamente, ma anche <u>perché</u> certe forme di ragionamento sono corrette e altre scorrette" ([K] p. 5).

7. Ma gli elementi della logica proposizionale e predicativa non sono gli unici argomenti di logica (in senso ampio) adatti per la SSS. L'altro grande argomento che dovrebbe essere insegnato sono gli elementi della teoria degli insiemi. I problemi dell'infinito hanno una tale rilevanza culturale che è deplorevole che per essi finora non si sia trovato un posto adeguato nell'ambito dei programmi di matematica per la SSS - in quei programmi, non dimentichiamolo, che per più di mezzo secolo hanno identificato il culmine dell'istruzione matematica nel liceo classico nello studio dei logaritmi e della trigonometria.

Nel suo ultimo libro Calvino scrive: "Tra i libri italiani degli ultimi anni quello che ho più letto, riletto e meditato è la <u>Breve storia dell'infinito</u> di Paolo Zellini" ([Ca] p. 68). Va anche ricordato il grande successo editoriale del libro di Lucio Lombardo Radice, L'infinito. Tutto questo dimostra la rilevanza culturale generale e non solo specialistica dei problemi dell'infinito.

Il prof. Prodi nel suo intervento a questa II Tavola rotonda ha lamentato lo stato di sudditanza culturale in cui generalmente si trovano gli insegnanti di matematica nella SSS. Temo che sarà sempre così finché essi continueranno a proporre agli studenti tecniche per la soluzione di problemi invece di problematiche concettuali intellettualmente stimolanti. L'infinito è, appunto, una di queste problematiche, e può essere trattato adeguatamente al livello della SSS come mostrano i primi capitoli di manuali come [E] o [V] che non presuppongono particolari conoscenze matematiche pur sviluppando tutti gli aspetti essenziali della problematica in questione.

8. Ho parlato finora di che cosa insegnare ma non ho detto chi debba insegnarlo. Sebbene la questione non mi sembri essenziale, ritengo tuttavia che il modo più semplice di implementare la mia proposta sarebbe di affidare l'insegnamento degli elementi della logica proposizionale e predicativa all'insegnante di filosofia e quella degli elementi della teoria degli insiemi all'insegnante di matematica.

In primo luogo ciò avrebbe il vantaggio di ripartire il peso dell'insegnamento degli argomenti di logica tra due insegnanti, senza sottrarre troppo tempo né all'uno né all'altro. In secondo luogo mi sembra che l'insegnamento degli elementi della logica proposizionale e predicativa, secondo i contenuti da me indicati, comporti il possesso di certi riferimenti storico-filosofici e filosofico-linguistici che difficilmente fanno parte, né

potrebbero far parte, del bagaglio culturale del laureato in matematica.

A questo proposito vorrei richiamarmi di nuovo all'intervento del prof. Prodi il quale ha riconosciuto che

> "spesso, se gli allievi [della SSS] sanno qualcosa di logica [...] lo devono all'insegnante di filosofia [...] la responsabilità principale è dell'insegnamento universitario. Quattro anni impiegati in pur raffinate tecniche matematiche, ma senza punti di riferimento, senza motivazioni e senza storia, lasciano una traccia di vuoto difficilmente colmabile, specialmente se questo processo è avvenuto con sofferenze e frustrazioni".

Io sono completamente d'accordo col prof. Prodi, ma temo che i difetti da lui lamentati siano difficilmente rimediabili.

Questo perché non solo mi sembra difficile introdurre nel corso di laurea in matematica quegli insegnamenti storico-filosofici e filosofico-linguistici che sarebbero necessari per colmare la traccia di vuoto lasciata dagli attuali curricula, ma anche perché mi sembra difficile persino modificare questi ultimi in modo da consentire una preparazione logica (in senso strettamente tecnico) sufficientemente approfondita.

Attualmente la formazione logica dei laureandi in matematica è affidata ad un unico corso annuale di logica matematica - dove esiste. Ora, un requisito minimo per un'adeguata preparazione logica è rappresentato dagli argomenti trattati in manuali come [S] , [Mo] o [BM] , ma questi non possono certo essere coperti in un corso annuale. A meno di non attribuire allo studio della logica un ben diverso rilievo nell'ambito del corso di laurea in matematica - cosa che non mi sembra molto realistica - temo che questa difficoltà sia difficilmente superabile.

Naturalmente l'ideale per l'insegnamento della logica sarebbe un corso di laurea organizzato sulla falsariga dei corsi di laurea in filosofia e matematica offerti da alcune Università del Regno Unito. Comunque l'attuale corso di laurea in filosofia sembra più fruibile di quello in matematica perché permette agli studenti di seguire un corso triennale di logica - dove esiste.

Non occorre sottolineare che, nel proporre di affidare l'insegnamento degli elementi di logica proposizionale e predicativa all'insegnante di filosofia sottintendo: in una SSS in cui l'insegnamento della filosofia sia stato opportunamente aggiornato. In nessun Paese in cui sia insegnata nella SSS, la filosofia viene insegnata come in Italia, e i risultati - negativi - attuali sono una riprova dei limiti di questo approccio isolato che abbiamo ereditato dall'idealismo gentiliano senza trovar la forza di cambiarlo.

9. Vorrei concludere rispondendo al quesito se l'informatica possa rappresentare un'occasione da non perdere per inserire elementi di logica nella SSS. Mi sembra che, se ci si pone il problema in modo rigoroso e non solo strumentale, la risposta possa essere affermativa solo sotto certe condizioni.

Fino a non molto tempo fa la logica rappresentava per l'informatica un lusso a cui era possibile rinunziare senza grave danno. Oggi invece essa è diventata un prerequisito indispensabile, tanto che in un manuale recente si afferma che gli sviluppi attuali dell'informatica richiedono che la logica

> "debba sostituire il calcolo infinitesimale come requisito per gli studenti del corso di laurea in informatica" ([MW] p. vii).

Se le cose stanno in questi termini, allora la logica non solo non è più un lusso ma diventa un punto di passaggio obbligato per l'informatica.

Non sembra realistico, però, collocare questo punto di passaggio al livello della SSS. Interazioni serie e non banali tra logica ed informatica avvengono oggi soprattutto in aree come la programmazione logica, la programmazione funzionale, la verifica dei programmi e la sintesi dei programmi. Si tratta di aree che coinvolgono conoscenze logiche relativamente avanzate, e comunque superiori a quelle che si può ragionevolmente pensare di introdurre nella SSS.

A meno di non incentrare l'insegnamento dell'informatica nella SSS sul Prolog e la programmazione logica, non vedo quale vantaggio potrebbe trarre la logica dall'essere ridotta, ad esempio, a teoria dei circuiti elettronici digitali.

Riferimenti bibliografici

[Bs] M.J. Beeson, 'Proving programs and programming proofs', in Logic, Methodology and Philosophy of Science VII, a cura di R. Barcan Marcus et al., Amsterdam (North-Holland) 1986, pp. 51-82.

[BM] J.L. Bell e M. Machover, A course in mathematical logic, Amsterdam (North-Holland) 1977.

[Be] P. Bernays, 'Über Hilberts Gedanken zur Grundlegung der Arithmetik', Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, vol. 31 (1922) pp. 10-19.

[Ca] I. Calvino, Lezioni americane, Milano (Garzanti) 1988.

[Ce] C. Cellucci, 'Per l'insegnamento della logica', Nuova Secondaria, 15 settembre 1987, pp. 20-23.

[E] H.B. Enderton, Elements of set theory, New York (Academic Press) 1977.

[H] D. Hilbert, Ricerche sui fondamenti della matematica, a cura di V.M. Abrusci, Napoli (Bibliopolis) 1985.

[K] V. Klenk, Understanding symbolic logic, Englewood Cliffs, N.J. (Prentice-Hall) 1983.

[MW] Z. Manna e R. Waldinger, The logical basis for computer programming, vol. I, Reading, Mass. (Addison-Wesley) 1985.

[Mi] J.S. Mill, Autobiografia, Bari (Laterza) 1976.

[Mo] J.D. Monk, Mathematical logic, Berlin (Springer-Verlag) 1976.

[P] G. Peano, Opere scelte, vol. II, Roma (Cremonese) 1958.

[S] J.R. Shoenfield, Logica matematica, Torino (Boringhieri) 1980.

[V] R.L. Vaught, Set theory. An introduction, Boston (Birkhäuser) 1985.

[W] H. Wang, 'The formalization of mathematics', Journal of symbolic logic, vol. 19 (1954), pp. 241-266; ristampato in H. Wang, A survey of mathematical logic, Amsterdam (North-Holland) 1963, pp. 559-584.

[Z] P. Zellini, La ribellione del numero, Milano (Adelphi) 1985.