Estratto da

Atti degli incontri di logica matematica Volume 6, Siena 28-31 maggio 1989.

Disponibile in rete su http://www.ailalogica.it

Fenomeni di incompletezza nelle logiche modali quantificate

Silvio Ghilardi

Dipartimento di Matematica "Federigo Enriques"

Università di Milano

In [1] vengono presentate varie generalizzazioni della semantica kripkiana per la logica modale del primo ordine. Tali generalizzazioni operano in due direzioni: da un lato utilizzano *relazioni* invece che inclusioni nelle transizioni fra i domini, dall'altro costruiscono modelli su domini di variazione che sono *categorie* anzichè preordini. Il primo tipo di generalizzazione richiede mutamenti nella sintassi logica, mentre il secondo può essere utilizzato, da solo, anche nell'ambito delle problematiche tradizionali per ottenere risultati di indipendenza ed incompletezza, come mi propongo di illustrare qui. Un *modello* per la logica modale [1] del primo ordine è una terna $\mathcal{M} = \langle \mathbf{C}, X, I \rangle$ dove $\mathbf{C}$ è una categoria piccola, X un $\mathbf{C}$-insieme (ossia un funtore $X : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Ins}$) e I una funzione che associa ad ogni lettera predicativa n-aria e ad ogni oggetto α di $\mathbf{C}$ un sottoinsieme di X_α. Da questi dati, si può definire facilmente per induzione la nozione di verità di una formula A ad un certo livello (=oggetto di $\mathbf{C}$) α sotto un certo α-assegnamento $\mu : N \longrightarrow X_\alpha$. Mi limito ad illustrare la clausola cruciale per l'operatore di necessità che è la seguente (data una freccia $k : \alpha \longrightarrow \beta$ di $\mathbf{C}$, con μk indico il β-assegnamento ottenuto componendo μ con X_k):

$$\mu \models_\alpha \Box A \quad \text{sse} \quad \text{per ogni } \beta,\ k : \alpha \longrightarrow \beta,\ \ \mu k \models_\beta A.$$

Astraendo successivamente dall'assegnamento, dal livello, dall'interpretazione I e infine anche dal $\mathbf{C}$-insieme X, si ottiene una nozione di verità che dipende solo da $\mathbf{C}$: in questo modo, possiamo definire la nozione di $\mathbf{C}$-validità di una formula o anche di una logica.

Data una categoria piccola $\mathbf{C}$, definiamo riflessione di $\mathbf{C}$ il preordine avente per elementi gli oggetti di $\mathbf{C}$ e per relazione di preordine la relazione contenente le coppie di oggetti $\langle \alpha, \beta \rangle$ che sono collegate fra loro da almeno una freccia di $\mathbf{C}$. Definiamo inoltre *universo rappresentato da* $\mathbf{C}$ [2] l'unione disgiunta delle riflessioni delle categorie comma $\alpha \downarrow \mathbf{C}$ (al variare di α fra gli oggetti di $\mathbf{C}$). Molti preordini noti sono universi rappresentati da categorie piccole: ad esempio, l'albero n-ario completo è l'universo rappresentato dal monoide libero su n elementi. L'importanza della costruzione introdotta è dovuta al seguente lemma-chiave:

Lemma *Sia L una logica proposizionale modale e sia $Q - L$ la sua estensione quantificata. Risulta che, assegnata una categoria piccola $\mathbf{C}$, $Q - L$ è $\mathbf{C}$-valida se e solo se*

[1] Prendo in considerazione solo logiche modali normali che siano estensioni di $S4$.

[2] Uso la parola "universo" invece della parola inglese "frame".

l'universo rappresentato da $\mathbf{C}$ *è un universo per* L *(nel senso solito della semantica kripkiana per la logica proposizionale modale).*

Questo lemma serve per ottenere risultati di incompletezza rispetto alla semantica di Kripke (K-incompletezza per brevità). Ad esempio, supponiamo che $Q - L$ sia K-completa e che L non sia un'estensione di $S5$: allora, l'universo $\circlearrowleft\bullet \longrightarrow \bullet\circlearrowright$ è un universo per L; d'altra parte tale universo è l'universo rappresentato da una categoria, anzi da un monoide $\mathbf{M}$, quindi ogni formula predicativa non $\mathbf{M}$-valida non sarà dimostrabile in $Q - L$ e, per l'ipotesi della K-completezza di $Q - L$, dovrà ammettere un contromodello nella semantica kripkiana. Tale contromodello può essere complicato e autorizzare a concludere (mediante l'uso di opportuni p-morfismi) che certi universi finiti sono universi per L, ponendo quindi delle limitazioni pesanti su L stessa. Se poi scopriamo che anche tali universi finiti sono universi rappresentati da categorie, il procedimento si può ripetere ancora. Questo, in sostanza, il metodo: mi limito qui a segnalare i principali risultati finora raggiunti, rimandando a [3] o [4] per le dimostrazioni.

Teorema *Sia* L *una logica proposizionale modale tale che* $L \not\supseteq S5$ *e tale che* $Q - L$ *sia K-completa; allora si ha che* $L \subseteq S4.3$ *e che, se* $L \neq S4.3$, *la cardinalità delle anticatene finite negli universi per* L *è illimitata.*

Il metodo, con opportune variazioni, può essere applicato a sistemi con la formula Barcan (BF), si vedano [2] e [4]. In particolare, anche limitandosi a logiche proposizionali K-complete o addirittura canoniche, si può far vedere che non esiste nessuna relazione di implicazione fra la K-completezza di $Q - L$ e di $Q - L + BF$. Val la pena notare, infine, che gli esempi di logiche K-complete del tipo $Q - L$ finora noti sono davvero pochi, il che, combinato con i risultati negativi sopra esposti, sembra costituire un argomento abbastanza forte per sostenere la sostanziale inadeguatezza della semantica kripkiana per la logica modale quantificata.

[1] Ghilardi S. - Meloni G.C. *Modal and tense predicate logic: models in presheaves and categorical conceptualization*, Springer LNM 1348, Springer-Verlag, Berlino, pp.130-142, (1988);

[2] Ghilardi S. *Presheaf semantics and independence results for some non-classical first-order logics*, Archive for Mathematical Logic, 29, II, pp.125-136 (1989);

[3] Ghilardi S. *Incompleteness results in Kripke semantics*, in corso di stampa sul Journ. of Symb. Logic;

[4] Ghilardi S. *Modalità e categorie*, Tesi di dottorato in matematica, Università degli Studi di Milano (1990).