Su una fondazione geometrica dei numeri: Frege e Hilbert

Giuseppina Anatriello
Università di Napoli "Federico II"
anatriello@unina.it

Educare alla razionalità. In ricordo di Paolo Gentilini
10 giugno 2016, Sestri Levante

Nuovo tentativo di fondazione dell'aritmetica di Gottlob Frege

Gottlob Frege in *Nuovo tentativo di fondazione dell'aritmetica* (1924-25) (in *Scritti postumi*, prima edizione 1969, trad. in italiano 1987) avvia un approccio geometrico ai numeri complessi.

Morì nel luglio del 1925 senza poter portare a termine il suo progetto.

Sei mesi prima della sua morte Frege affidò i suoi manoscritti al figlio adottivo Alfred scrivendogli:

Caro Alfred,
non disprezzare questi miei manoscritti. Anche se non è tutto oro c'è dell'oro. Credo che un giorno alcune cose che contengono saranno apprezzate assai più di oggi. Fa che nulla vada perduto.
Con affetto tuo padre.
È una gran parte di me stesso che con essi ti lascio.

Scritti postumi di Gottlob Frege

C. Penco scrive: *[F]rege nei suoi ultimi scritti, pubblicati postumi, abbandonò il logicismo e delineò una teoria della fondazione geometrica della matematica, avvicinandosi così alle idee kantiane contro cui si era scagliato nei suoi primi scritti, soprattutto in Grundlagen der Arithmetik (1894), che peraltro rappresenta a tutt'oggi un classico della filosofia della matematica* (*Frege*, voce dell'Enciclopedia di Gallarate; revisione della precedente di F. Barone).

Frege

In *Nuovo tentativo di fondazione dell'aritmetica*, 1924-25

Ho dovuto rinunciare alla mia idea che l'aritmetica sia un ramo della logica e che di conseguenza tutto in aritmetica debba venir dimostrato in modo puramente logico [...] *Ho dovuto sacrificare la mia opinione che l'aritmetica non ha bisogno di mutuare dall'intuizione alcuna base dimostrativa, dove per 'intuizione" intendo la fonte conoscitiva geometrica, cioè la fonte da cui derivano gli assiomi della geometria (euclidea).*

Esporrò prima il mio piano. Discostandomi dalla consuetudine, non estenderò il campo di quello che io chiamo numero prendendo le mosse dai numeri interi positivi; infatti, in senso stretto, è un errore logico non disporre di un significato stabile per un termine, e intendere con esso cose sempre diverse [...].

Frege

In *Numeri e Aritmetica*, 1924-25

I primi numeri che si considerano, gli interi positivi, nascono dal contare. Essi sono i numeri che si insegnano per primi ai bambini perché un bambino deve essere preparato a fare conti, a vendere e a comprare. Ai matematici servono altri numeri [...].

Non c'è alcun ponte che conduce dai numeri dei bambini [gli interi positivii] ai numeri irrazionali. Anch'io un tempo ritenevo possibile conquistare per via puramente logica tutto il campo numerico a partire dai numeri dei bambini [...].

Quanto più ho riflettuto su questo punto, tanto più mi sono convinto che aritmetica e geometria sono cresciute dallo stesso terreno e, precisamente, dal terreno della geometria, così che tutta l'aritmetica è, propriamente, geometria. La matematica appare così perfettamente unitaria nella sua essenza.

Frege

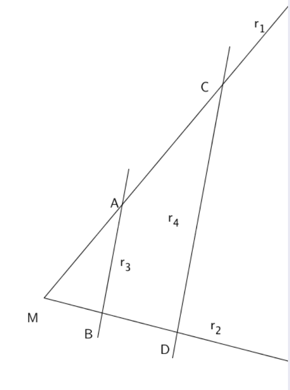
In *Nuovo tentativo di fondazione dell'aritmetica*, 1924-25

Se quello accettato fino ad ora si mostra insufficiente, va demolito e sostituito con un nuovo edificio. Io mi dirigo direttamente alla meta finale, ossia ai numeri complessi.
Cerchi dunque il lettore di dimenticare quel che finora ha creduto di sapere sui numeri complessi e sui rapporti di segmenti, infatti, tale sapere è probabilmente un'illusione. L'errore fondamentale consiste nel prendere le mosse dai numeri che si sono appresi da bambini.

Frege, *Nuovo tentativo di fondazione dell'aritmetica*

Quindi introduce un gruppo di definizioni e in particolare quella di *rapporti identici di segmenti* (avvio di una teoria geometrica delle proporzioni.)

Rapporti identici



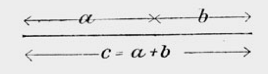
CD e *AB* rette parallele

$$\iff \quad MA/MC = MB/MD$$

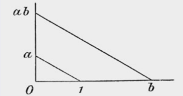
David Hilbert

In *Grundlagen der Geometrie* (1899) David Hilbert nel capitolo 3, *Teoria delle proporzioni*, introduce *il calcolo dei segmenti sulla base del teorema di Pascal (Pappo)*.

Somma di segmenti



Prodotto di segmenti



In cui, scrive Hilbert, *le regole di calcolo per i numeri valgono tutte inalterate*.

Segue il paragrafo *Le proporzioni e i teoremi sulla similitudine*. *Con l'aiuto del calcolo dei segmenti sopra esposto si può fondare la teoria delle proporzioni di Euclide in modo irreprensibile e senza l'assioma di Archimede nel modo seguente:*

$$a : b = c : d \iff ad = bc$$

I *Fondamenti della Geometria* di Hilbert

Il paragrafo successivo si intitola *Le equazioni della retta e del piano*. In esso Hilbert introduce, a partire dall'aritmetica dei segmenti, gli assi cartesiani nel piano.
Tra i punti di un asse dice di poter operare secondo le regole di calcolo dei numeri reali.

Perviene all'equazione cartesiana della retta.

Quindi aggiunge che *si dimostrano in modo altrettanto facile i risultati corrispondenti nella geometria dello spazio*.

Di seguito Hilbert mette in corrispondenza i punti della retta con numeri reali, corrispondenza che è biunivoca con l'aggiunta del gruppo degli assiomi di continuità (Archimedeo+Completezza).

Recenti considerazioni sui *Fondamenti della Geometria* di Hilbert: Rowe

D. Rowe, *The calm before the storm: Hilbert's early views on foundations*. (In V. F. Hendricks, et al. Eds. Proof theory. 2000)

Negli Elementi di Euclide l'esposizione geometrica si interrompe dopo i primi quattro libri per esporre una teoria delle proporzioni che viene applicata nel Libro VI alle figure piane. In Grundlagen der Geometrie, su basi puramente geometriche, Hilbert erige un'opportuna teoria delle proporzioni e realizza una unificazione di teorie che, dai tempi di Euclide, si sono sempre divise su fondamenta separate.
Quello che nessuno vide prima di Hilbert, comunque, fu la possibilità di aritmetizzare la geometria dall'interno. Questo ha permesso la costruzione di nuovi ponti tra le geometrie assiomatiche puramente sintetiche e le geometrie analitiche che operano su diversi campi numerici.

Recenti considerazioni sui *Fondamenti della Geometria* di Hilbert: Giovannini

E. Giovannini, *Bridging the gap between analytic and synthetic geometry: Hilbert's axiomatic approach*. (Synthese. 2016)

Giovannini approfondisce l'analisi di Rowe su questi particolari aspetti dei *Fondamenti della Geometria* di Hilbert.

Dimostrando che non è necessario ricorrere a nessun tipo di assunto numerico nella costruzione di una parte importante della geometria elementare, Hilbert stava perseguendo l'obiettivo centrale epistemologico di dimostrare che la geometria dovrebbe essere considerata, per quanto riguarda le sue fondamenta, una scienza autosufficiente o autonoma.

Recenti considerazioni sui *Fondamenti della Geometria* di Hilbert: Giovannini

Giovannni utilizza gli appunti delle lezioni tenute da Hilbert su corsi riguardanti la geometria (appunti conservati in Niedersächsische Staats und Universitätsbibliothek Göttingen, Handschriftenabteilung) per sottolineare il profondo significato dell'*Aritmetica dei segmenti* esposta nei *Fondamenti della Geometria*.

Il primo corso di lezioni sulla geometria venne tenuto da Hilbert nel semestre estivo del 1891. Il tema fu la geometria proiettiva. Hilbert adottò un approccio puramente sintetico.

Hilbert vide l'emergere delle geometria descrittiva e proiettiva, nelle opere di Monge (1746-1818), Poncelet (1788-1867), Steiner (1796-1863) e von Staudt (1798-1867), come una reazione all'unilaterale sviluppo analitico della geometria nei secoli XVII e XVIII.

Hilbert: manoscritti

Il corso di lezioni iniziò con la presentazione della classificazione della geometria in tre diversi settori: geometria intuitiva, geometria assiomatica e geometria analitica.

In [Wissenschaftliche Tagebücher] Cod. Ms. D. Hilbert 535 (1891)

La ricchezza della geometria greca era nelle idee, nei risultati e nei problemi, ma aveva un difetto: ad essa mancava un metodo generale, che rende possibile l'ulteriore fruttuoso sviluppo della scienza. Nella geometria di Euclide ogni cosa appare già finita e non c'è posto per un lavoro produttivo [...]

Hilbert: manoscritti

In [Wissenschaftliche Tagebücher] Cod. Ms. D. Hilbert 535 (1891)

...Questa idea [il metodo delle coordinate] *rende ogni problema geometrico immediatamente accessibile al calcolo. I teoremi dei greci sono stati dimostrati ancora una volta, e poi sono stati generalizzati. Le formule, il calcolo, e, grazie a Cartesio un vero e proprio metodo, sostituirono trucchi speciali.*
Per quanto importante questo progresso sia stato, e comunque meravigliosi i successi siano stati, tuttavia la geometria come tale ha sofferto, alla fine, dello sviluppo unilaterale di questo metodo.
Si calcola esclusivamente, senza avere alcuna intuizione di ciò che si è calcolato. Il senso della figura geometrica e per la costruzione geometrica è stato perso.

Geometria Analitica: aritmezzazione della geometria o geometrizzazione dell'algebra?

C. Boyer, *Descartes and the geometrization of algebra*, Amer. Math. Monthly (1959)

Il grande risultato ottenuto da Cartesio in matematica viene descritto invariabilmente come l'aritmetizzazione della geometria. La verità è che Cartesio non aveva alcuna intenzione di aritmetizzare la geometria. In effetti, lo scopo de La géométrie potrebbe essere descritto con la stessa validità come la traduzione delle operazioni algebriche nel linguaggio della geometria.
La prima sezione del lavoro è intitolata "Come i calcoli di aritmetica sono correlati alle operazioni di geometria" e la seconda descrive "Come moltiplicazione, divisione, e l'estrazione di radici quadrate vengono eseguite geometricamente".

Boyer

La géométrie di Cartesio

La géométrie fu pubblicata in appendice al celebre Discours de la Methode, e nel trattato principale Cartesio non sembra essere stato di parte né per la geometria né per l'algebra. Accusò la prima di affidarsi troppo pesantemente ai disegni, che affaticano l'immaginazione inutilmente e criticò l'altra come arte confusa e oscura, che mette in imbarazzo la mente. Lo scopo del suo metodo era duplice: (1) attraverso la procedura algebrica liberare la geometria dall'uso di diagrammi e (2) spiegare le operazioni dell'algebra attraverso l'interpretazione geometrica.
Il suo lavoro fu infatti un collegamento tra i due campi quello della geometria e quello dell'algebra, ma l'associazione era bipolare e non pregiudicante a favore di una delle direzioni.

Hilbert: manoscritti

In [Wissenschaftliche Tagebücher] Cod. Ms. D. Hilbert 600 (Anno ?)

Se si lavora in geometria, allora deve essere fatto sinteticamente. La superficie o la curva osservate cosa hanno a che fare con una equazione $f(x, y, z) = 0$*? Nell'essenza della geometria l'analisi è uno strumento estraneo, che quindi deve essere evitato, se vogliamo erigere o fondare la geometria come un edificio. Ma la geometria e l'analisi possono stimolarsi e servirsi l'un l'altro a fini euristici.*

Su *Fondamenti della Geometria* di Hilbert

A. Conte, Suppl. Not. UMI n. 7, 1979.

Pur trattando di argomenti elementari, la lettura del libro richiede una certa dimestichezza con la geometria affine e con la geometria proiettiva, in quanto molte delle dimostrazioni sono soltanto accennate e fanno riferimento a risultati dati per noti.

Note su assiomi e dimostrazioni nei *Fondamenti della Geometria* di Hilbert

Frege, *Note in margine a Die Grundlagen der Geometrie di Hilbert* (in Scritti postumi, dopo 1903)

H. Freudenthal, *Recensione dell'ottava edizione delle Grundlagen der Geometrie di Hilbert*, (Nieuw Archief voor Wiskunde (4),V, pp.105-142, 1957)

Proposta: via geometria sintetica per i numeri complessi secondo l'idea di Frege e utilizzando l'Aritmetica dei segmenti di Hilbert

A., Tortoriello, Vincenzi, *On an assumption of geometric foundation of numbers*, (Int. J. of Math Ed. in Sci. and Tech, 2016)

Viene data una definizione dei numeri complessi in ambito puramente geometrico (sintetico) con l'assunzione degli assiomi di Euclide (quelli espliciti e quelli implicitamente ammessi) + assunzione delle configurazioni di Pappo e di Desargues come assiomi di comodo (sovrabbondanti, ma di evidenza intuitiva immediata e che consentono di bypassare artificiose dimostrazioni).
L'interpretazione geometrica dei numeri complessi diventa la definizione e il calcolo con le sue proprietà traduce e sintetizza costruzioni geometriche.

Sviluppi: via sintetica per la geometria analitica

A., Vincenzi, *On a synthetic approach to analytic geometry*, (2016)

Struttura di spazio vettoriale naturale nel piano e nello spazio euclidei.

Definizione sintetica di prodotto vettoriale.

Passaggio alle coordinate e sistemi cartesiani monometrici ortogonali.

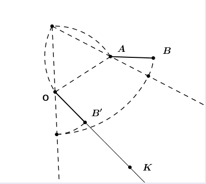
Equazioni parametriche e cartesiane della retta e del pano.

Espressioni in termini di coordinate del prodotto scalare e del prodotto vettoriale.

Identificazione di piano e spazio euclidei (riferiti a sistemi cartesiani monometrici ortogonali) con le strutture $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ e $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

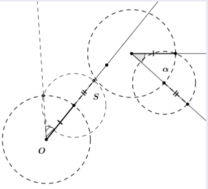
Trasporto via assiomi di Euclide

Trasporto del segmento



Si utilizza per:
definire segmenti *uguali*,
confrontare e sommare segmenti

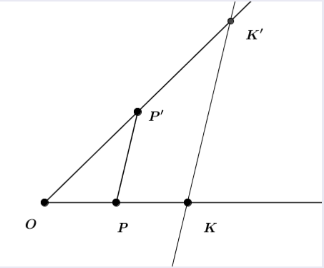
Trasporto dell'angolo



Si utilizza per:
definire angoli *uguali*,
confrontare e sommare angoli

Definizione: proporzione tra punti rispetto ad un polo

Proporzione di polo O

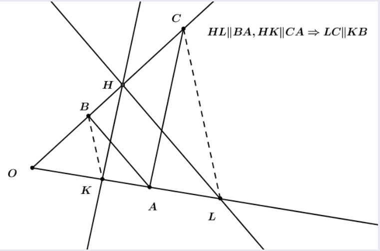


Definizione di proporzione tra punti rispetto al polo O

$$PP'//KK' \iff P : K =_O P' : K'$$

Assiomi di Pappo e Desargues

Assioma di Pappo



In termini di proporzioni

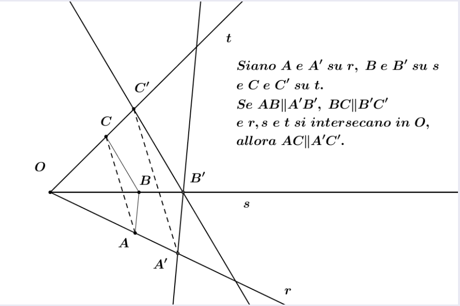
$$A : L =_O B : H$$

$$K : A =_O H : C$$

$$\Downarrow$$

$$K : L =_O B : C$$

Assioma di Desargues



In termini di proporzioni

$$A : A' =_O B : B'$$

$$B : B' =_O C : C'$$

$$\Downarrow$$

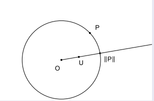
$$A : A' =_O C : C'$$

Con gli assiomi di Pappo e di Desargues le proporzioni di polo O introdotte conservano tutte le proprietà delle proporzioni tra numeri che hanno significato con le ovvie sostituzioni.

Modulo di un punto e proporzione in moduli

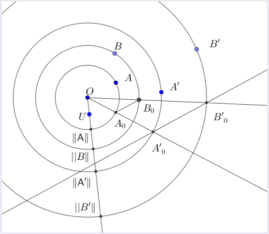
Data la semiretta OU. Sia $P \neq O$, denotiamo con $\|P\|$ l'intersezione della semiretta OU con circonferenza centro O raggio $\overline{OP}$.

Modulo su semiretta



$\|P\| = \|P\|_{(O,U)}$ appartiene alla semiretta OU e alla circonferenza di centro O e passante per P

Proporzioni tra moduli



Siano A, A', B, B' tali che

$$A_0 : A'_0 =_O B_0 : B'_0$$

scriveremo

$$\|A\| : \|A'\| =_O \|B\| : \|B'\|$$

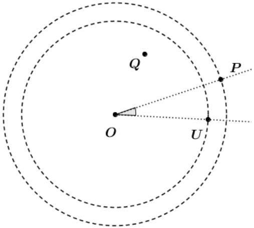
Riferimento polo-unità, coordinate geometriche

Dato un punto O e i punti P e Q distinti da O, definiamo *rapporto* di $\|P\|$ e $\|Q\|$, l'insieme delle proporzioni

$$\|P\| : \|Q\| =_O P' : Q'.$$

Denoteremo tale rapporto con il simbolo $\|P\|/\|Q\|$.
Si vuole ottenere in questo modo una nozione *equivalente* a quella di *rapporti identici* di Frege.

Si fissino O e U distinti in un piano euclideo e si considerino i moduli dei punti del piano sulla semiretta OU.



coordinate geometriche che individuano P univocamente rispetto a (O, U):

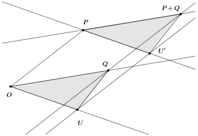
1. il *rapporto* $\|P\|/U$;
2. l'angolo $P\hat{O}U$

Piano riferito a (O, U).

Somma $P + Q$ come cambio di polo = Traslazione

Si vuole cambiare solo il polo da O in P. Nuovo riferimento (P, U') con PU' semiretta parallela e concorde con OU e $\overline{OU} = \overline{PU'}$.

$K = P + Q$ ha in (P, U') le *coordinate* che Q ha in (O, U),

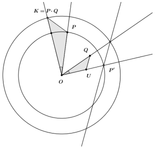


i) $U'\hat{P}K = U\hat{O}Q$ (equiorientati)
ii) $\overline{OQ} = \overline{PK}$.

Prodotto $P \cdot Q$ come cambio di unità= Rotazione+Riscalamento

Si vuole cambiare solo l'unità U in P. Nuovo riferimento (O, P).

$K = P \cdot Q$, $P, Q \neq O$, ha in (O, P) le coordinate che Q ha (O, U).



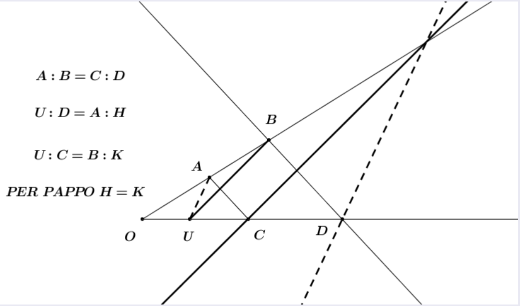
i) $P\widehat{O}K = U\widehat{O}Q$ (equiorientati)
ii) $\|K\|/\|P\| = \|Q\|/U$.

Conseguenze immediate:

Equazione parametrica della retta

Se con t denotiamo i punti della retta OU
i punti $P = t\,Q$ sono tutti e soli i punti della retta OQ,
i punti $P = P_0 + t\,Q$ sono tutti e soli i punti della retta passante per P_0 e parallela alla retta OQ.

Legame tra prodotto e proporzione



Risulta

$$\|A\| : \|B\| = \|C\| : \|D\|$$

se e solo se

$$\|A\|\|D\| = \|B\|\|C\|$$

Il campo complesso

Il calcolo geometrico introdotto nel piano euclideo a partire da due suoi punti, O e U, individua una struttura di campo nell'insieme dei punti del piano (che chiamiamo campo complesso (O, U)) .

O = *zero* e U= *unità*

Gli assiomi di Pappo e di Desargues consentono una rapida verifica delle proprietà di campo.

L'insieme dei punti della retta OU costituisce un sottocampo del piano complesso (O, U).

La relazione d'ordine tra i punti della retta OU:

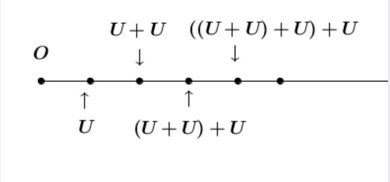
$$A < B \iff \exists R \in \text{ semiretta } OU \setminus \{O\} \, : \, A + R = B,$$

rende il campo ordinato, e l'ordine è completo se si aggiunge l'assioma di Dedekind.

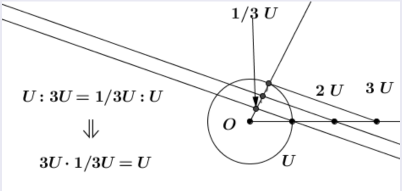
Punti naturali, razionali, reali

I punti della retta *OU* sono i *punti reali*, i punti del piano sono i *punti complessi*.
Si possono individuare su *OU* i *punti naturali* (come i multipli dell'unità *U*) e i *punti razionali positivi* (come i multipli di inversi di punti naturali)

Punti naturali



Punti inversi di naturali



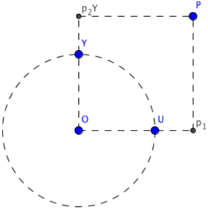
Algebrizzazione dei punti reali

Sulla semiretta *OU* resta individuata una struttura di monoide ordinato di grandezze misurabili (soddisfacente la proprietá archimedea, l'assioma di divisibilità e l'assioma di completezza), quindi di spazio di misura rispetto ad *U*. È possibile allora attribuire ad ogni punto della semiretta un coefficiente che rappresenta la misura del punto rispetto a *U*. L'insieme dei coefficienti eredita la struttura di monoide ordinato di grandezze misurabili (e un'operazione di prodotto indotta dalla somma). Si ottengono in questo modo i numeri reali non negativi epurati della natura geometrica e per simmetrizzazione i reali tutti.

- Cassina, *Sulla Teoria delle grandezze e dell'equivalenza*,
- Conforto, *Postulati della geometria euclidea e geometria non euclidea*,
in [Villa, M., a cura, Repertorio di Matematica, vol II, Cedam, 1971].
- Morin, Busulini, *Grandezze Geometriche*, in *Elementi di geometria per il biennio delle scuole medie superiori*, vol II, Cedam, 1963.
- A., *Fondamenti geometrici per la Matematica*, Aracne, 2014.

Rappresentazione algebrica dei punti complessi

Per i punti complessi P vale la relazione



$$P = p_1 + p_2 \cdot Y,$$

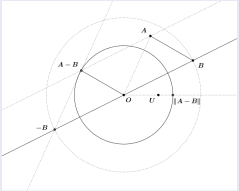
con $\|Y\| = U$, $U\hat{O}Y$ (orientato) retto, e $p_1, p_2 \in OU$

i ente su cui si opera con le stesse regole formali che valgono per Y; si ottiene $a + i\, b$, numero complesso con a e b numeri reali.

La struttura di spazio vettoriale indotta dalla struttura di campo

Considerando l'operazione di somma tra punti e l'operazione di prodotto tra un punto della retta OU e un generico punto del piano, si individua nel piano una struttura di spazio vettoriale avente come campo degli scalari il sottocampo dei punti della retta OU.

Distanza *AB*



Sia $K = \|A - B\|$. Risulta

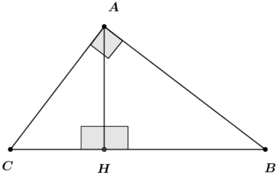
$$\overline{AB} = \overline{KO}$$

Se $\triangle(ABC)$ e $\triangle(A'B'C')$ sono triangoli simili, risulta:

$$\|B - A\| : \|B' - A'\| = \|B - C\| : \|B' - C'\| = \|C - A\| : \|C' - A'\|,$$

in particolare valgono il primo e il secondo teorema di Euclide.

Teorema di Pitagora



$\triangle(BAC)$ rettangolo in A, per il primo teorema di Euclide

(1) $\|C-A\|^2 = \|H-C\| \cdot \|B-C\|$

(2) $\|B-A\|^2 = \|H-B\| \cdot \|B-C\|$

Da (1) e (2), e per il calcolo sviluppato:

$$\|B-A\|^2 + \|C-A\|^2 = \|B-C\|\|H-B\| + \|B-C\|\|H-C\|$$

$$= \|B-C\|(\|H-B\| + \|H-C\|) = \|B-C\|^2.$$

Prodotto scalare

Il triangolo $\triangle(AOB)$ è retto in O se e solo se risulta

$$\|A\|^2 + \|B\|^2 = \|A \pm B\|^2.$$

Qualunque sia l'angolo $A\hat{O}B$ si introduce il prodotto scalare $\langle A, B \rangle$, ponendo

$$\langle A, B \rangle = \frac{1}{2}\left(\|A + B\|^2 - (\|A\|^2 + \|B\|^2)\right).$$

Per il teorema di Carnot

$$\langle A, B \rangle = \pm \|A'\| \|B\| = \pm \|A\| \|B'\|,$$

(con A' proiezione ortogonale di A sulla retta OB e B' proiezione ortogonale di B sulla retta OA).
Nota: $\langle A, A \rangle = \|A\|^2$.

Incipit dei *Fondamenti della Geometria* di Hilbert

So fängt denn alle menschliche Erkenntnis mit Anschauungen an, geht von da zu Begriffen und endigt mit Ideen.

Kant, Kritik der reinen Vernunft,

Tutta l'umana conoscenza inizia con le intuizioni, quindi passa ai concetti e termina con le idee.

Kant, Critica della ragion pura

GRAZIE