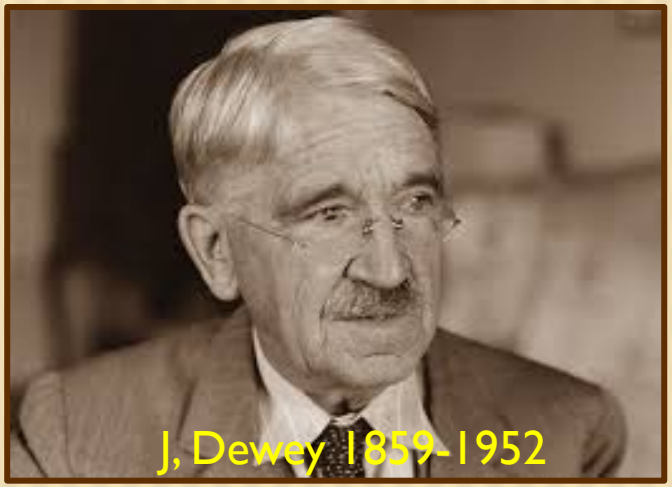
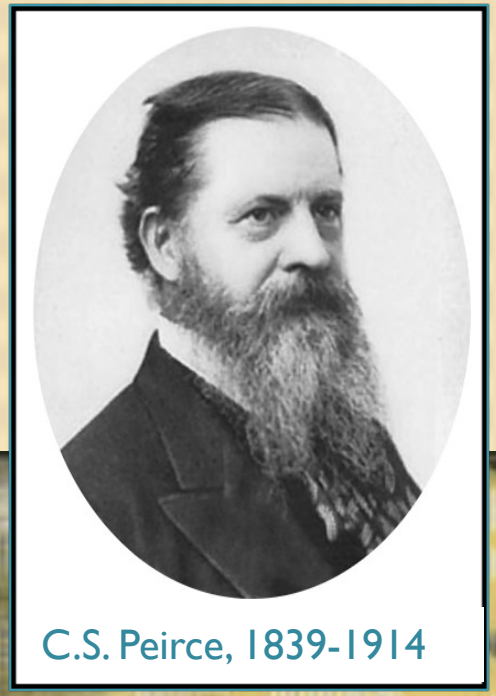
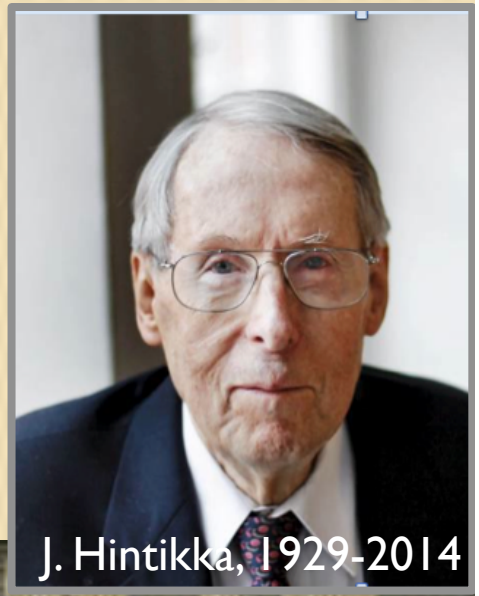
Da Dewey a Hintikka (senza dimenticare Peirce): la logica della ricerca in classe

F. Arzarello - Torino

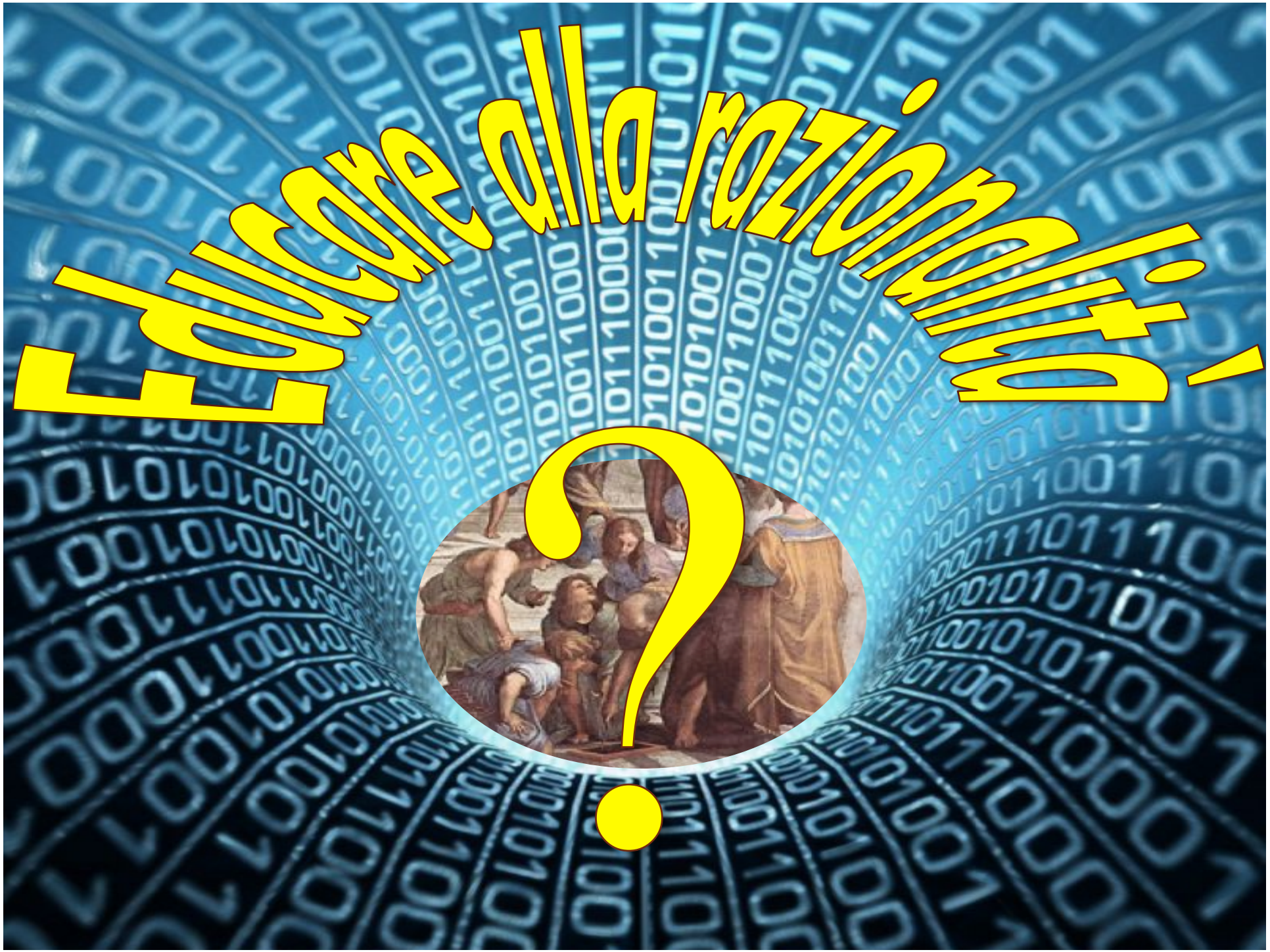

J, Dewey 1859-1952


C.S. Peirce, 1839-1914


J. Hintikka, 1929-2014

Educare alla Razionalità
In ricordo di Paolo Gentilini
Sestri Levante, 11 giugno 2016

Introduzione


Educare alla razionalità?

Educare alla Razionalità

Risultati di apprendimento comuni a tutti i percorsi liceali:

Area logico-argomentativa

- Saper sostenere una propria tesi e saper ascoltare e valutare criticamente le **argomentazioni** altrui.
- Acquisire l'abitudine a **ragionare** con rigore logico, ad **identificare i problemi** e a individuare possibili **soluzioni**.
- Essere in grado di leggere e interpretare **criticamente** i contenuti delle diverse forme di comunicazione.

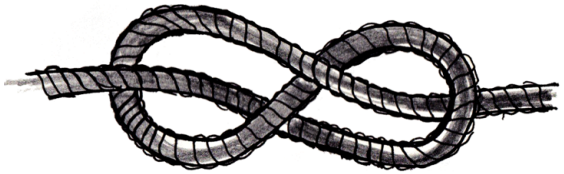
(Indicazioni Nazionali per i Licei)

Risultati di apprendimento
del Liceo scientifico

Comprendere le strutture portanti dei procedimenti **argomentativi e dimostrativi** della matematica, anche attraverso la padronanza del linguaggio logico-formale; **usarle** in particolare nell'individuare e **risolvere problemi** di varia natura;

Educare alla Razionalità in classe

Argomentare



Dimostrare

Y. Rav (1999, p.13), propone la seguente definizione di dimostrazione, che faccio mia:

- "Le dimostrazioni (proofs) sono il modo cha ha il matematico per *mostrare l'apparato matematico (to display the mathematical machinery)* per risolvere i problemi e per giustificare che una soluzione proposta per un problema sia davvero una soluzione".

Le distingue dalle derivazioni (oggetti sintattici), affermando che le dimostrazioni non possono essere rese intellegibili considerando solo le loro componenti deduttive (p. 12).

Nel suo volume *QED: fenomenologia della dimostrazione* (To: Boringhieri, 2005) G. Lolli sostiene l'importanza di avvicinarsi alle dimostrazioni nella scuola educando alla comprensione della varietà delle tecniche logiche che le sottendono:

"Non si deve essere vincolati a una sola impostazione…Le varie riforme [scolastiche]… privilegiano ora l'una ora l'altra disposizione, una volta i calcoli, una volta le astrazioni, oppure la soluzione dei problemi. La risposta sta nella loro compresenza, o addirittura contrapposizione…"

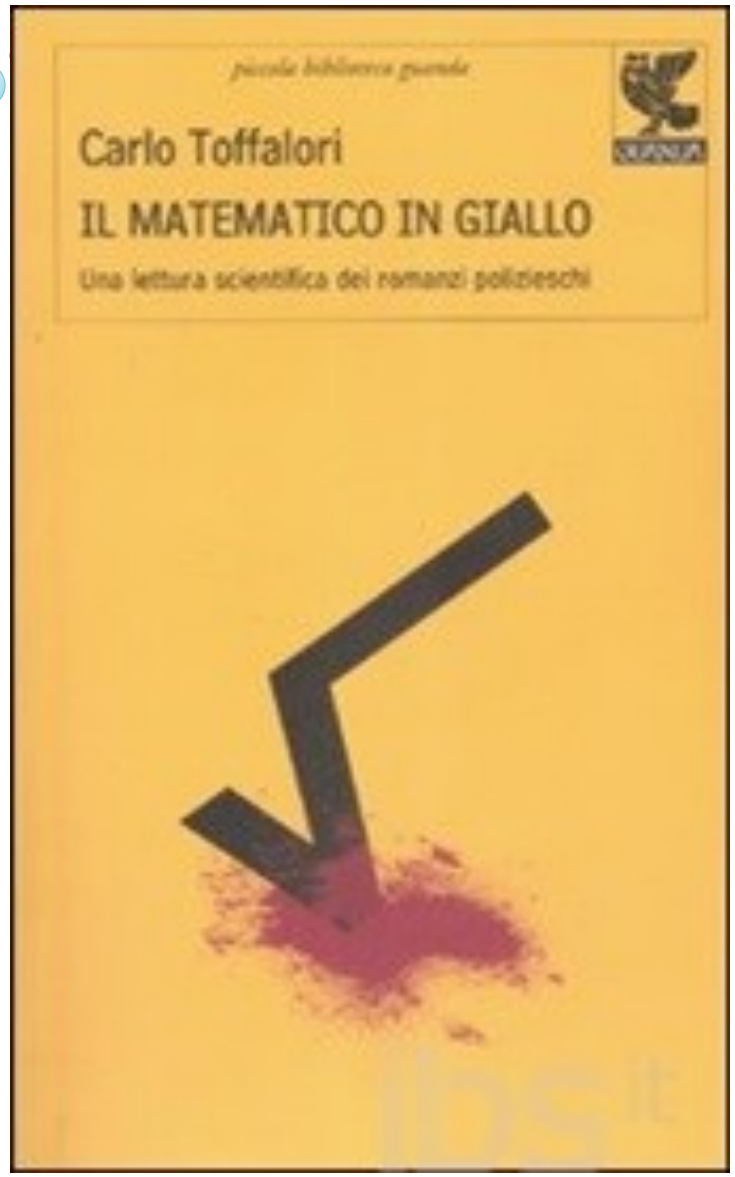
(p. 178)

Il mio vuol essere un contributo in questo senso, basato su esperienze didattiche e riflessioni teoriche sviluppate in questi anni.

È mio obiettivo mettere a fuoco modi di pensare e tecniche logiche che possono supportare gli allievi, quando sono richiesti di risolvere problemi (in contesti vari) e di spiegare matematicamente (dimostrare?) il perché delle loro soluzioni.

Farò vedere che esiste una continuità (epistemica, cognitiva, didattica) tra processi argomentativi intuitivi e prodotti dimostrativi, fondamentale per progettare opportuni interventi didattici.

Educare alla Razionalità



"Il personaggio che meglio incarna le caratteristiche del lucido ragionatore […] è certamente Sherlock Holmes.
[…]
S.H. fa del metodo deduttivo […] la base delle sue indagini".

(p. 18)

Silver Blaze: il curioso episodio del cane nella notte

Antefatto: il famoso cavallo da corsa Silver Blaze è stato rubato dalla scuderia nel cuore della notte e la mattina successiva il suo allenatore è stato trovato morto nella brughiera, ucciso da un colpo molto potente. Tutti i sospetti affiorano ma nessuno sa cos'è realmente accaduto.

Ispettore Gregory: «C'è qualche altro punto su cui ritiene opportuno attirare la mia attenzione?»

Sherlock Holmes: « Sì, su curioso episodio del cane quella notte.»

Isp. Greogory: «Ma quella notte il cane non ha fatto nulla.»

Sherlock Holmes: « Questo, appunto, è l'episodio curioso.»

Sherlock Holmes sta di fatto ponendo tre domande (ai testimoni o all'ispettore Gregory):

1. C'era un cane che faceva la guardia alla scuderia quando il cavallo è stato rubato?

   Sì

2. Il cane ha abbaiato?

   No, non ha svegliato nessuno.

3. A chi non abbaia un cane addestrato a fare la guardia nel cuore della notte?

   Al suo padrone.

Silver Blaze: il curioso episodio del cane nella notte

Antefatto: il famoso cavallo da corsa Silver Blaze è stato rubato dalla scuderia nel cuore della notte e la mattina successiva il suo allenatore è stato trovato morto nella brughiera, ucciso da un colpo molto potente. Tutti i sospetti affiorano ma nessuno sa cos'è realmente accaduto.

Ispettore Gregory: «C'è qualche altro punto su cui ritiene opportuno attirare la mia attenzione?»

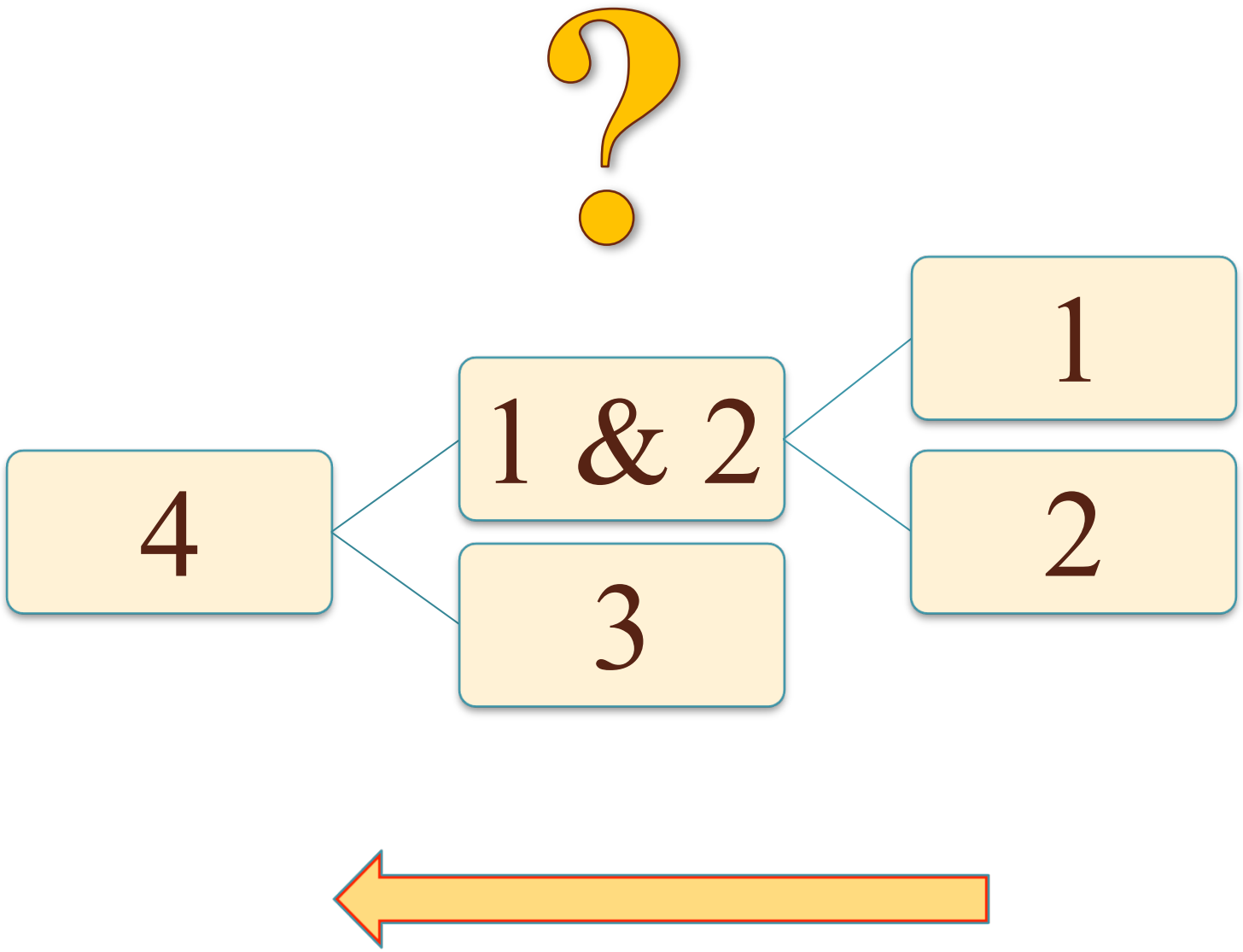
Sherlock Holmes: « Sì, su curioso episodio del cane quella notte.»

Isp. Greogory: «Ma quella notte il cane non ha fatto nulla.»

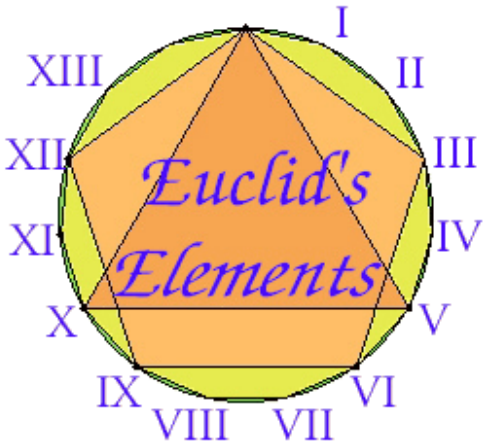
Sherlock Holmes: « Questo, appunto, è l'episodio curioso.»

Le successive argomentazioni deduttive di S.H. sono la trasposizione in forma di concatenazione logica delle risposte alle sue domande:

1. C'era un cane che faceva la guardia di notte alla scuderia
2. Il cane non ha abbaiato quando il cavallo è stato rubato
3. Un cane da guardia addestrato non abbaia solo al suo padrone
4. Quindi il ladro è stato il suo padrone


1
1 & 2
2
4
3

http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/toc.html



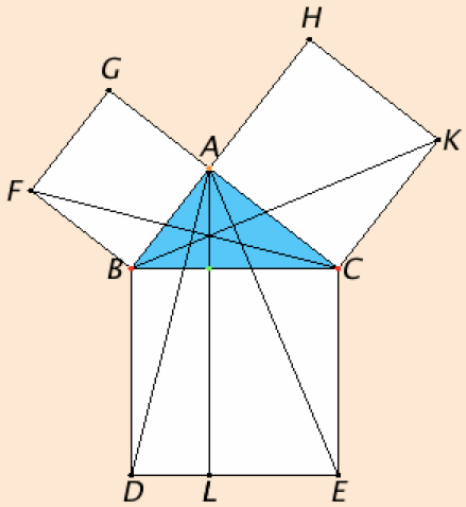
Proposition 47

In right-angled triangles the square on the side opposite the right angle equals the sum of the squares on the sides containing the right angle.

Let *ABC* be a right-angled triangle having the angle *BAC* right.

I say that the square on *BC* equals the sum of the squares on *BA* and *AC*.

Describe the square *BDEC* on *BC*, and the squares *GB* and *HC* on *BA* and *AC*. Draw *AL* through *A* parallel to either *BD* or *CE*, and join *AD* and *FC*. I.46



Since each of the angles *BAC* and *BAG* is right, it follows that with a straight line *BA*, and at the point *A* on it, the two straight lines *AC* and *AG* not lying on the same side make the adjacent angles equal to two right angles, therefore *CA* is in a straight line with *AG*. I.31, I.Post.1 I.Def.22 I.14

For the same reason *BA* is also in a straight line with *AH*.

Since the angle *DBC* equals the angle *FBA*, for each is right, add the angle *ABC* to each, therefore the whole angle *DBA* equals the whole angle *FBC*. I.Def.22 I.Post.4 C.N.2

Since *DB* equals *BC*, and *FB* equals *BA*, the two sides *AB* and *BD* equal the two sides *FB* and *BC* respectively, and the angle *ABD* equals the angle *FBC*, therefore the base *AD* equals the base *FC*, and the triangle *ABD* equals the triangle *FBC*. I.Def.22 I.4

Now the parallelogram *BL* is double the triangle *ABD*, for they have the same base *BD* and are in the same parallels *BD* and *AL*. And the square *GB* is double the triangle *FBC*, for they again have the same base *FB* and are in the same parallels *FB* and *GC*.

Therefore the parallelogram *BL* also equals the square *GB*. I.41

Similarly, if *AE* and *BK* are joined, the parallelogram *CL* can also be proved equal to the square *HC*. Therefore the whole square *BDEC* equals the sum of the two squares *GB* and *HC*.

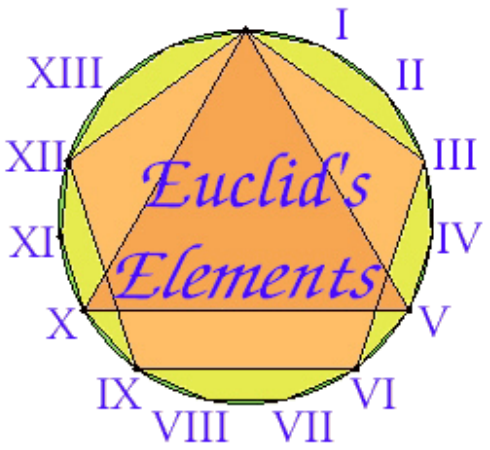
And the square *BDEC* is described on *BC*, and the squares *GB* and *HC* on *BA* and *AC*. C.N.2

Therefore the square on *BC* equals the sum of the squares on *BA* and *AC*.

Therefore *in right-angled triangles the square on the side opposite the right angle equals the sum of the squares on the sides containing the right angle.*.

Q.E.D.

http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/toc.html



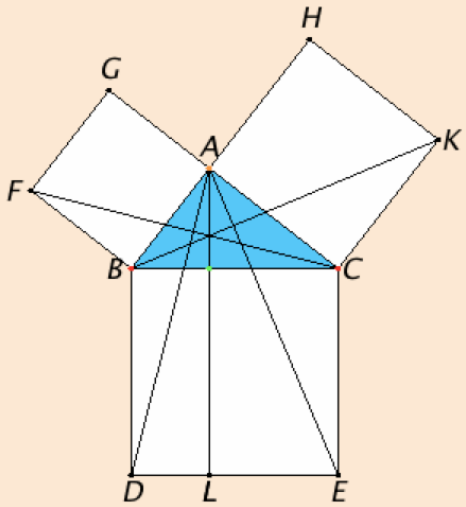
Proposition 47

In right-angled triangles the square on the side opposite the right angle equals the sum of the squares on the sides containing the

Let *ABC* be a right-angled triangle having the angle *BAC* right.

I say that the square on *BC* equals the sum of the squares on *BA* and *AC*.

Describe the square *BDEC* on *BC*, and the squares *GB* and *HC* on *BA* and *AC*. Draw *AL* through *A* parallel to either *BD* or *CE*, and join *AD* and *FC*.



Since each of the angles *BAC* and *BAG* is right, it follows that with a straight line *BA*, and at the point *A* on it, the two straight lines *AC* and *AG* not lying on the same side make the adjacent angles equal to two right angles, therefore *CA* is in a straight line with *AG*.

For the same reason *BA* is also in a straight line with *AH*.

Since the angle *DBC* equals the angle *FBA*, for each is right, add the angle *ABC* to each, therefore the whole angle *DB* whole angle *FBC*.

Since *DB* equals *BC*, and *FB* equals *BA*, the two sides *AB* and *BD* equal the two sides *FB* and *BC* respectively, and th angle *ABD* equals the angle *FBC*, therefore the base *AD* equals the base *FC*, and the triangle *ABD* equals the triangle *FBC*.

Now the parallelogram *BL* is double the triangle *ABD*, for they have the same base *BD* and are in the same parallels *BL* *GB* is double the triangle *FBC*, for they again have the same base *FB* and are in the same parallels *FB* and *GC*.

Therefore the parallelogram *BL* also equals the square *GB*.

Similarly, if *AE* and *BK* are joined, the parallelogram *CL* can also be proved equal to the square *HC*. Therefore the wh the sum of the two squares *GB* and *HC*.

And the square *BDEC* is described on *BC*, and the squares *GB* and *HC* on *BA* and *AC*.

Therefore the square on *BC* equals the sum of the squares on *BA* and *AC*.

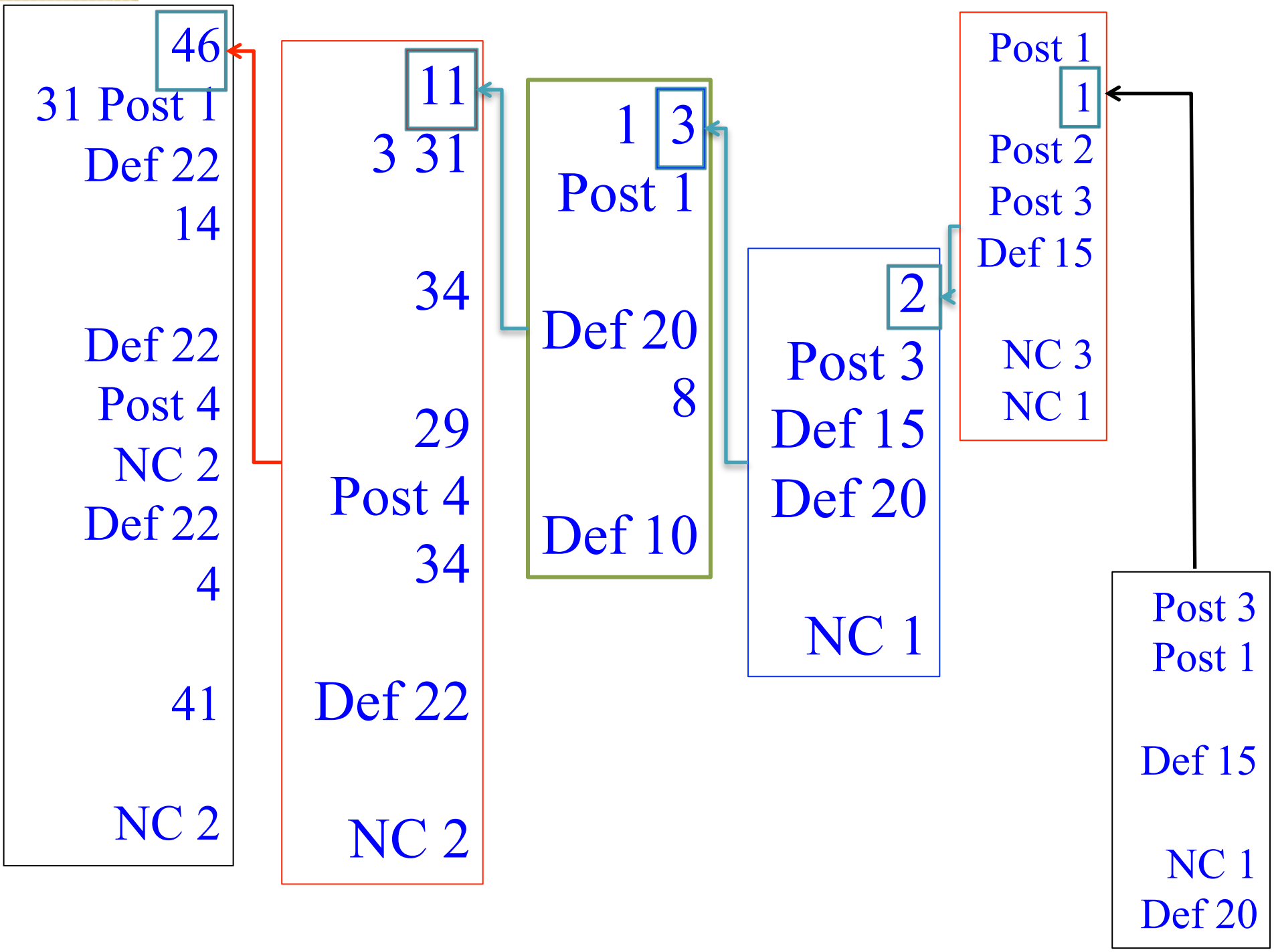
Therefore *in right-angled triangles the square on the side opposite the right angle equals the sum of the squares on the angle*..

46
31 Post 1
Def 22
14

Def 22
Post 4
NC 2
Def 22
4

41

NC 2


46
31 Post 1
Def 22
14
Def 22
Post 4
NC 2
Def 22
4
41
NC 2
11
3 31
34
29
Post 4
34
Def 22
NC 2
1 3
Post 1
Def 20
8
Def 10
2
Post 3
Def 15
Def 20
NC 1
Post 1
1
Post 2
Post 3
Def 15
NC 3
NC 1
Post 3
Post 1
Def 15
NC 1
Def 20

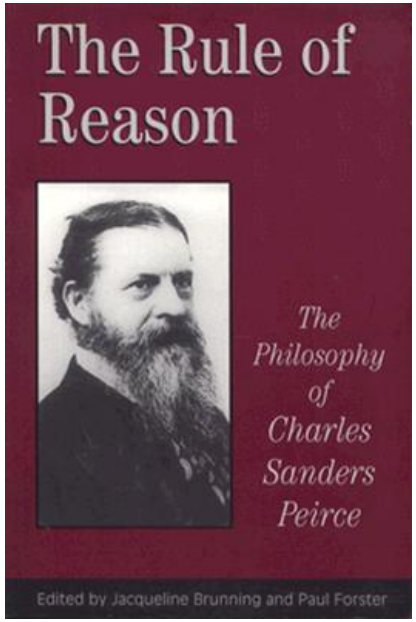
Abduzioni

Osservo:	A
So che:	C → A
Inferisco:	C

Risultato
Regola
Caso

Secondo Pierce i processi abduttivi sono le ”uniche operazioni logiche che introducono nuove idee”

(CP, 5.172)



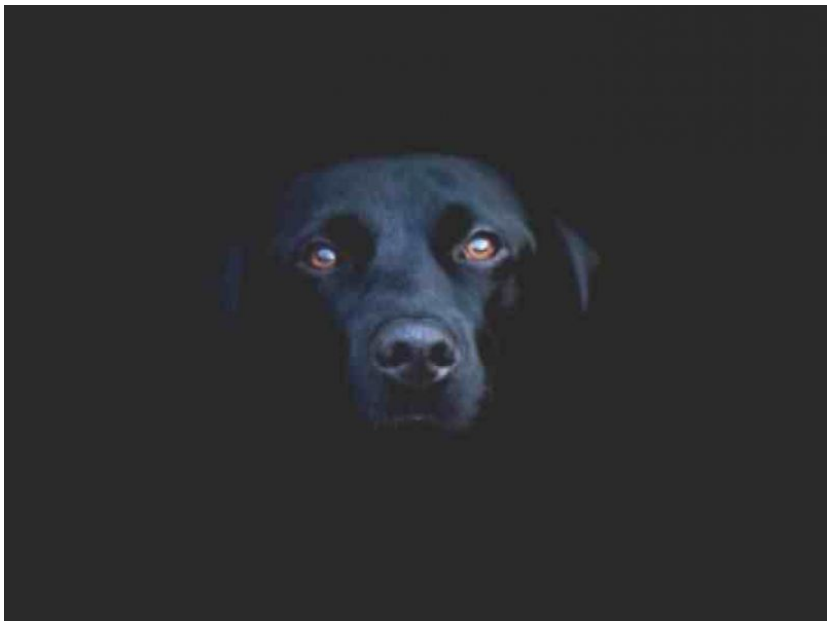
Abduzioni

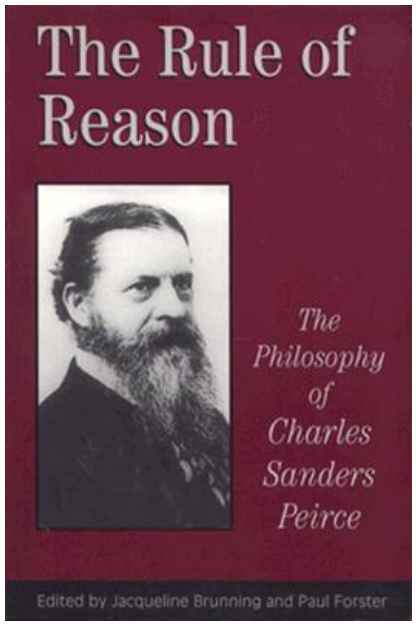
Osservo:	A
So che:	C → A
Inferisco:	C

Risultato

Regola

Caso





Indice

1. Che cosa dice la ricerca didattica: continuità e discontinuità tra argomentazioni e dimostrazioni
2. Dal modello di Toulmin alla Logic of Inquiry di Hintikka
3. Le radici della Logic of Inquiry
4. La Logic of Inquiry come strumento di analisi
5. La logic of Inquiry come strumento di progettazione didattica:
    - 5a. Il metodo della ricerca variata
    - 5b. Giochi di interazione strategica
6. Un esercizio

1.
Che cosa dice la ricerca didattica: continuità e discontinuità tra argomentazioni e dimostrazioni

Fischbein (1982)

La nozione di prova formale è completamente fuori dalle principali modalità di comportamento degli allievi.

Il pensiero matematico fondato sull'idea di una certezza assoluta contraddice il modo con cui si elaborano

- le conoscenze quotidiane
- la conoscenza scientifica

Occorre che gli studenti acquisiscano una nuova base, non "naturale", per le loro credenze.

A conclusioni simili con motivazioni diverse giungono altri ricercatori:

Balacheff (1987),
Duval (1991),
Reiss, Klieme & Heinze (2001),
Dvora (2012),
Thompson, Senk & Johnson (2012),
…

Discontinuità

- Tutti questi studi mettono in luce un salto tra le forme usuali, intuitive di argomentazione e quelle formali, proprie della dimostrazione.

Alcuni evidenziano una forma di *discontinuità cognitiva* tra le due; altri mettono maggiormente in luce una *discontinuità epistemica* fra i rispettivi statuti conoscitivi; spesso le due forme di discontinuità sono entrambe sottolineate nella stessa ricerca.

Tutti quanti sostengono che è molto difficile trovare in classe un apprendimento effettivo della dimostrazione.

Continuità

Nel panorama delle ricerche didattiche troviamo anche posizioni diverse.

Gli studi di Boero, Garuti, Pedemonte e altri evidenziano, su basi essenzialmente linguistiche, la possibilità di forme di *continuità cognitiva* tra i momenti argomentativi e quelli dimostrativi degli allievi.

Risultati analoghi ho trovato anch'io, basandomi sull'analisi delle risorse semiotiche usate dagli allievi, in particolare in ambienti di geometria dinamica (Arzarello et al., 2012).

2.
Dal modello di Toulmin alla Logic of Inquiry di Hintikka

Per approfondire il discorso sul tema continuità/ discontinuità tra argomentazioni e dimostrazioni sono utili diversi modelli.

- Il primo, dovuto a S. Toulmin (linguista), è molto usato nelle ricerche di didattica della matematica (ad es. da Boero, Morselli e altri; C. Knipping & D. Reid) ed è utile per l'analisi della continuità cognitiva.

- Una sua analisi critica mi ha portato a considerare un modello che ritengo più soddisfacente per affrontare il problema della continuità discontinuità, in particolare epistemica: la *Logic of Inquiry* di J. Hintikka (logico).

- Un terzo modello è dovuto a un adattamento (Boero, Morselli, …) del costrutto della razionalità di J. Habermas: esso individua tre componenti nelle pratiche discorsive legate alla dimostrazione:

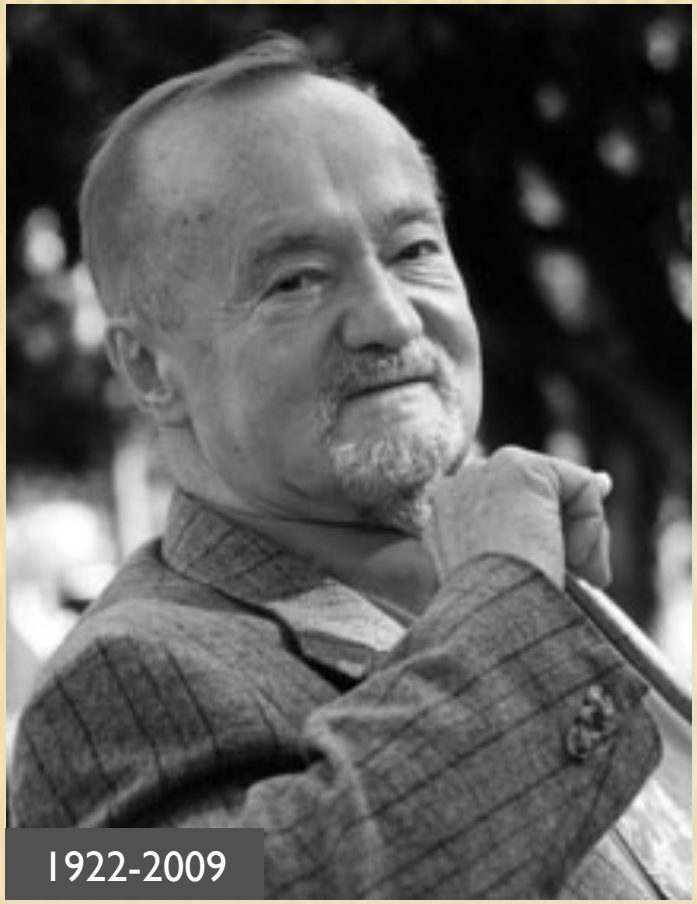
A) un aspetto **epistemico**, consistente nella convalida consapevole di dichiarazioni in base alle premesse condivise e a modi legittimi di ragionamento.

B) un aspetto **teleologico**, insito nel carattere di risoluzione di problemi proprio del dimostrare, e le scelte consapevoli fatte per ottenere il prodotto desiderato;

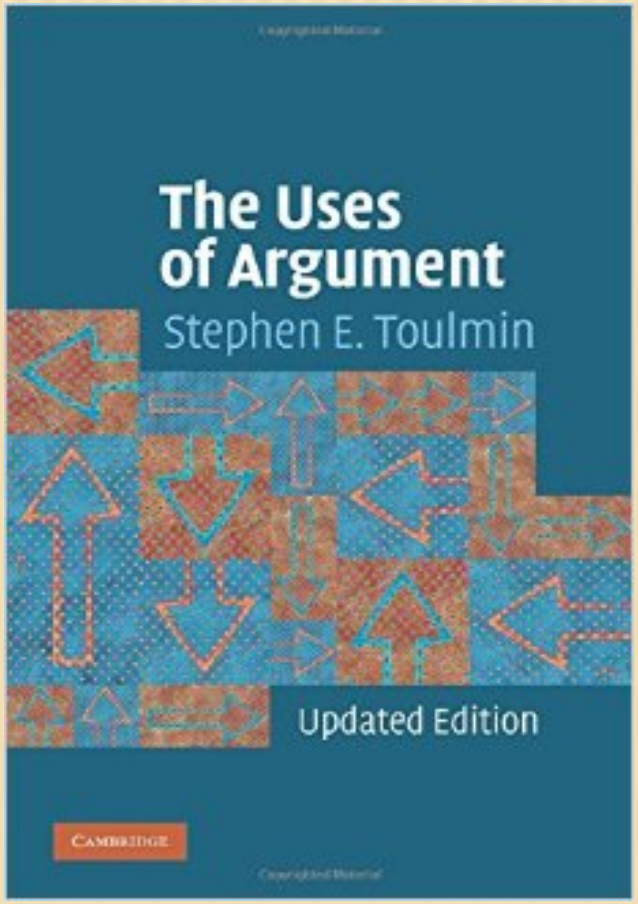
C) un aspetto **comunicativo**, che consiste nell'adesione consapevole a regole che garantiscono sia la possibilità di comunicare passi di ragionamento e la conformità dei prodotti (dimostrazioni) agli standard in una determinata cultura matematica.

2.
Dal modello di Toulmin alla Logic of Inquiry di Hintikka

Stephen E. Toulmin



1922-2009

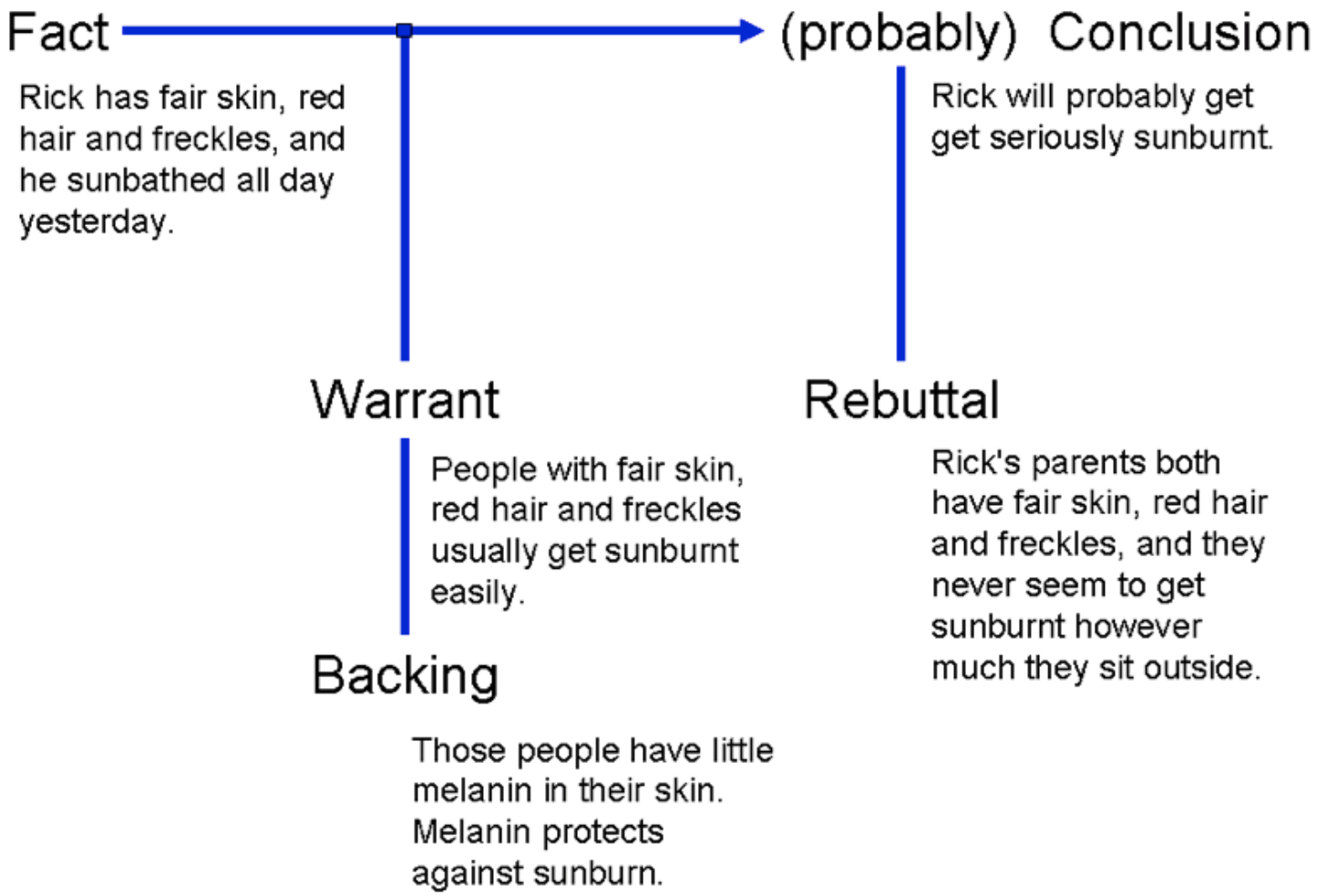


Il modello di Toulmin

a) Il modello (la sua struttura)

b) Il meta-modello
(il contesto del modello)

(a) Il modello (la sua struttura)



(b) Il meta-modello (il contesto)

Per Toulmin l'intero argomento ha senso se contestualizzato: si svolge tra due persone, paradigmaticamente, in disaccordo circa l'affermazione avanzata; in tal modo, uno di loro contesta il claim, e l'altro, che lo ha affermato, cerca di giustificarlo.

Il modello è ispirato alla pratica legale e questo è il motivo per cui Toulmin lo chiama **giurisprudenziale**.

(Toulmin 1958, pp. 41–43)

Il senso pieno del modello di Toulmin è costituito dall'intreccio delle due componenti (a) e (b).

La struttura della parte (a) ha senso solo se modellata dal processo dinamico della parte (b) e i suoi elementi sono visti secondo questa prospettiva.

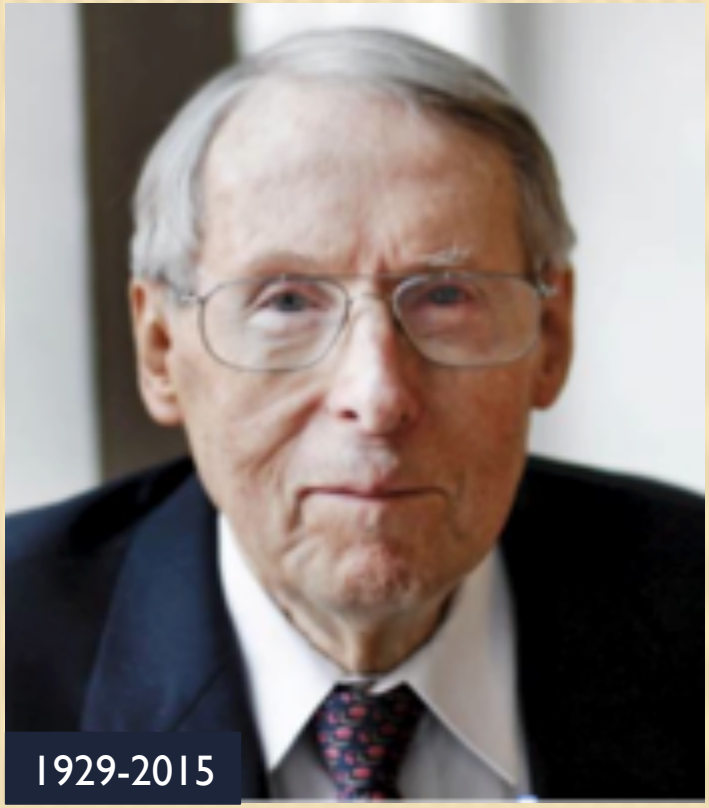
(T. Zarębski, 2009)

Il modello strutturale di Toulmin non sembra fornire alcun elemento di analisi sostanzialmente nuova al problema della discontinuità epistemica tra argomentazione e dimostrazione: anzi è basato su proprio su questa.

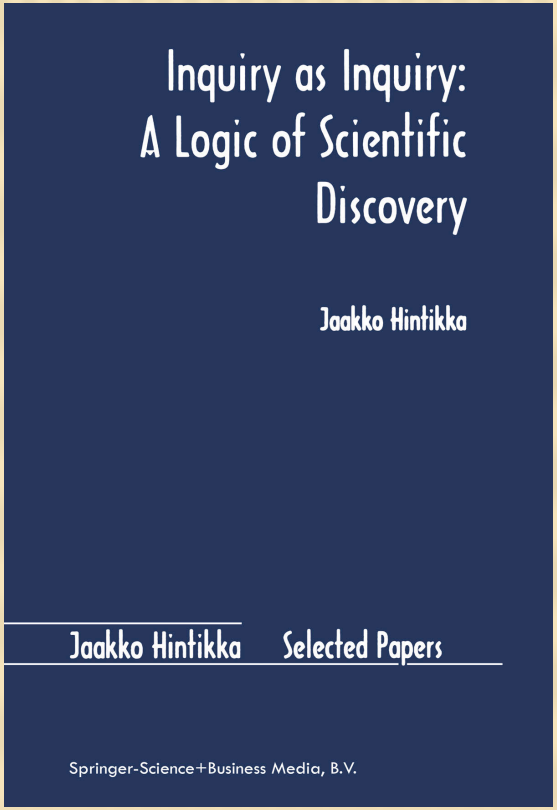
Sarebbe eventualmente il metamodello a potere fornire elementi di novità (in quanto plasmato per una logica della ricerca), ma non è preso generalmente in considerazione da chi si occupa di didattica della matematica.

Una critica più sottile, dovuta a Hintikka, mette in luce un altro limite nell'analisi dell'argomentazione fatta da Toulmin: ci torneremo.

K. Jaako J. Hintikka



1929-2015



Al di là degli aspetti tecnici, tre sono le caratteristiche fondamentali e profondamente intrecciate che caratterizzano la Logic of Inquiry (L. della ricerca/ indagine) :

- la dialettica tra domande e risposte;
- il legame profondo con la teoria dei giochi;
- l'interpretazione funzionale di connettivi e quantificatori.

Rispetto al modello di Toulmin (che H. commenta), una differenza è che l'obiettivo del ragionamento nel modello di H. è *ricercare la verità* non *convincere l'avversario,* come nel modello di T..

Hintikka, J. (1998), *The principles of Mathematics revisited*. Cambridge UP.
Hintikka, J. (1999), *Inquiry as Inquiry: A logic of Scientific Discovery*. Springer.
Hintikka, J. & Sandu G. (2011). Game theoretical semantics. In: van Benthem J. & Ter Meulen A., *Handbook of logic and language*. Elsevier. P. 415-466.

La LI come processo interrogativo

"Questa idea [della *Logic of Inquiry*] è vecchia come Socrate, e, quindi, antecedente alla maggior parte della epistemologia e della logica cui siamo abituati. È l'idea della ricerca della conoscenza attraverso la posizione di domande, o più precisamente della ricerca razionale della conoscenza attraverso la posizione esplicita o implicita di domande. Uso l'espressione "inquiry as inquiry" per esprimere questa idea. La mia idea fondamentale consiste appunto in questo: che tutta la ricerca razionale nel senso generico della ricerca di informazioni o di conoscenza consiste nella sua assimilazione al domandare (inquiry) nel senso etimologico del termine, cioè, ad un processo di posizione di quesiti (querying), ovvero a un processo di indagine (interrogation)".

(JH, 1999, p. ix)

Questo metodo spiega la complessità della logica della ricerca attraverso la distinzione fondamentale tra due tipi di "regole", che la governano:

- le **regole definitorie** (i passi deduttivi)
- i **principi strategici** (le mosse argomentative)

È attraverso una opportuna combinazione dei due che si può sviluppare il "gioco della logica". Queste distinzioni portano JH a definire la logica della ricerca come *logica della teoria dei giochi*.

La LI come logica della teoria dei giochi (GTL)

"Definiamo un certo gioco semantico tra due persone giocato in un "ambiente" $\mathcal{M}$ (= modello per il linguaggio della teoria).
I giocatori sono chiamati *Io* (il verificatore iniziale) e *Natura* (il falsificatore iniziale). Quando il gioco inizia, *Io* ha il ruolo di verificatore e *Natura* quello di falsificatore. In ogni fase del gioco, parlando intuitivamente, il verificatore cerca di mostrare che l'enunciato considerato in quel momento è vero e il falsificatore cerca di dimostrare che è falso ". (Hintikka & Sandu, 2011, p.416)

[si noti che se ad es. il verificatore X cerca di verificare *non*A ad un certo passo *n* significa che al passo (*n*+*1*) X diventa il falsificatore di A e analogamente il falsificatore Y ne diventa il verificatore]

"Ogni gioco semantico termina dopo un numero finito di mosse, con un giocatore vincente e l'altro perdente.

La caratteristica distintiva della Semantica della Teoria dei Giochi è la definizione della nozione semantica fondamentale di verità.

La verità o la falsità di S in $\mathcal{M}$ di solito non può essere vista considerando solo una 'mano' di G. Piuttosto, la verità in $\mathcal{M}$ è definita con riferimento a ciò che il verificatore iniziale può fare in G. Essa riguarda le strategie, nel senso della teoria dei giochi, che *Io* e *Natura* hanno a disposizione in G.

Una strategia in questo senso è una regola che dice a un giocatore che cosa fare in ogni situazione immaginabile che potrebbe sorgere in una mano del gioco".

(*ibid.*)

La verità di un enunciato S in un modello $\mathcal{M}$ può ora essere definita come segue:

($\mathcal{M} \models_{GTS} S)^+$ ($\mathcal{M}$ soddisfa S nel gioco G) sse esiste una strategia vincente per *Io* in $G(\mathcal{M})$.

La falsità di S in $\mathcal{M}$ è definita in modo analogo:

($\mathcal{M} \models_{GTS} S)^-$ sse esiste una strategia vincente per *Natura* in $G(\mathcal{M})$.

Per ogni enunciato del I ordine S e modello $\mathcal{M}$, la verità alla Tarski e quella GTS coincidono:

$$(\mathcal{M} \models_{GTS} S)^{+} \text{ sse } \quad \mathcal{M} \models_{Tarski} S$$

(Hintikka & Kulas, 1983: occorre l'assioma della scelta)

La Logic of Inquiry (LI) e la Logica della Teoria dei Giochi (GTL) sono le due facce della stessa medaglia, vale a dire il modello secondo JH.
Da un lato, la GTL si accorda epistemologicamente con la logica deduttiva standard, che risulta così ampliata in modo coerente.
Dall'altro lato, la LI permette di spiegare la dinamica di una teoria razionale della scoperta, così rilevante nell'insegnamento/apprendimento della matematica nonché nella ricerca.
In questo senso GTL/LI garantiscono una forte unità epistemica e cognitiva che può così fondare una didattica della dimostrazione di tipo "continuista".

L'interpretazione funzionale di connettivi e quantificatori

La GTL rivisita tutti gli aspetti proposizionali e quantificazionali della logica secondo un metodo funzionale, derivato dalla teoria dei giochi (e dai *semantic tableaux*).
Essa capovolge il consueto approccio alla Tarski per la definizione di verità. La definizione standard di verità di Tarski parte dalla condizione di verità per le proposizioni atomiche e prosegue in modo ricorsivo a quelle più complesse.
L'approccio della GTL al contrario, parte dalle proposizioni complesse e va verso le più semplici.

Un esempio sugli enunciati "per ogni x, esiste y…" illustra questo punto molto chiaramente.

JH (citando I. Stewart,1992, pp 105-106.) ricorda come Weierstrass ha spiegato il concetto di limite introducendo i quantificatori:

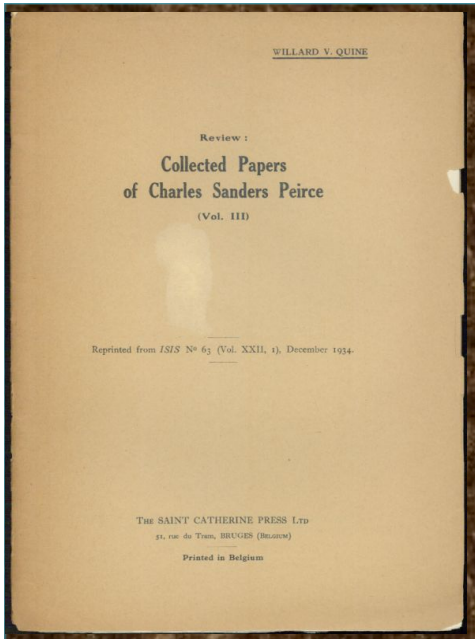
"Una funzione $f(x)$ tende ad un limite L quando x tende a un valore a, se dato un qualsiasi numero ε positivo, la differenza abs($f(x) - L$) è minore di ε quando abs(x – a) è minore di un certo numero δ, che dipende da ε.

È un gioco: 'Dimmi quanto vicino vuoi $f(x)$ a L, e io ti dirò quanto vicino x deve essere ad a'. Il giocatore Epsilon dice quanto vicino gli piace; allora Delta è libero di cercare un valore secondo quanto gli conviene. Se Delta ha sempre una strategia vincente, allora $f(x)$ tende al limite L".

La LI in quanto spiega una possibile continuità cognitiva ed epistemica tra argomentazioni e dimostrazioni costituisce una solida base per:

(i) analizzare i processi di produzione di dimostrazioni matematica da parte degli allievi;

(ii) impostare metodi didattici per avvicinare gli allievi all'argomentazione/ dimostrazione.


WILLARD V. QUINE

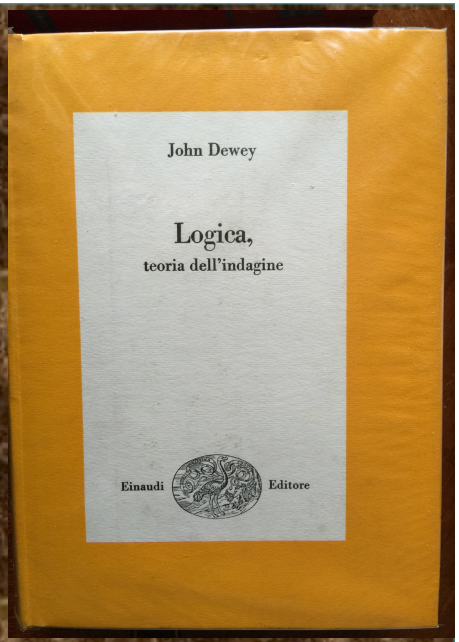
Review:

Collected Papers
of Charles Sanders Peirce
(Vol. III)

Reprinted from *ISIS* N° 63 (Vol. XXII, 1), December 1934.

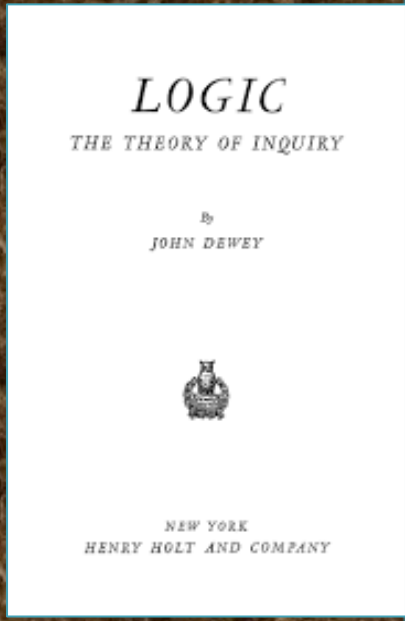
THE SAINT CATHERINE PRESS LTD
51, rue du Tram, BRUGES (BELGIUM)
Printed in Belgium

3.
Le radici della Logic of inquiry


John Dewey

Logica,
teoria dell'indagine

Einaudi Editore


LOGIC

THE THEORY OF INQUIRY

By
JOHN DEWEY

NEW YORK
HENRY HOLT AND COMPANY

La logica secondo Dewey:

- La logica è una disciplina che si evolve
- La materia della logica è determinata operativamente
- Le forme logiche hanno carattere di postulati
- La logica è una teoria naturalistica
- La logica è una disciplina sociale
- La logica è autonoma

(pp. 25-35)

C.S. Peirce, *Collected Papers*,
Vol. 3 pp. 154-168; Vol. 4, pp. 365-370

Logica come logica dell'indagine

"La teoria è, in breve, che tutte le forme logiche (con le loro proprietà caratteristiche) nascono attraverso il lavoro d'indagine e concernono il controllo dell'indagine in vista dell'attendibilità delle asserzioni prodotte".

…

mentre l'indagine dell'indagine è *causa cognoscendi* delle forme logiche, la primitiva indagine è essa stessa *causa essendi* delle forme poi rivelate da quell'indagine ulteriore.

(p. 3-4 =12)

"Le conseguenze osservabili delle operazioni di osservazione sperimentale determinano il valore scientifico del principio dedotto.

…

…tutte le forme logiche, in quanto costituiscono ciò che si è detta *materia prossima della logica (proximate logical subject matter)*, sono esempi di una relazione fra mezzi e risultati in un'indagine opportunamente controllata, la parola 'controllata' stando qui a significare l'uso di metodi di ricerca sviluppati e perfezionati nel corso di processi d'indagine continuativa".

(p. 11 = 21)

L'indagine e i suoi metodi come fonte della logicità - debito a Peirce:

"…egli fu il primo scrittore di logica a fare della ricerca e dei metodi di questa la fonte prima ed unica della logicità".

(p. 10 = 19, Nota 1)

4.
La LI come strumento di analisi

Due componenti principali :

- la componente di investigazione (CI)
- la componente deduttiva (CD).

Le due componenti si alternano al fine di soddisfare i diversi scopi dell'investigatore.

Si può allora avere una struttura "annidata": (CI → (CD → (CI →...)).

La componente CI: Domanda → Esplorazione → Risposta

- È sorretta essenzialmente da una successione di domande esplicite o implicite $Q_1, Q_2, \ldots Q_n$.
- Ogni domanda è eventualmente seguita da una risposta A_i, che in generale è il risultato di un'esplorazione.

La componente CD

È caratterizzata da nuove specifiche azioni/ produzioni e modalità.

Il soggetto non è più alla ricerca di congetture o alla verifica delle medesime; ha già prodotto uno o più enunciati verificati.

Lo scopo cambia: ha la necessità di formulare la verità così accertata in modalità logiche opportune al fine di "giustificare che una soluzione proposta per un problema sia davvero una soluzione".

CI e CD

PRODUZIONI OSSERVABILI	**FUNZIONI SPECIFICHE**	**MODALITÀ**
Frase	Domanda	Ascendente
Scritto	Asserzione	Neutrale
Gesto	Congettura	Discendente
Altro (sguardi, …)	Esplorazione	*Distaccato*
Silenzio	Verificca	*Controllo logico*
	Piano	
	Passo deduttivo	
	Catena deduttiva	

(In corsivo gli elementi che appartengono solo alla Componente Deduttiva)

Esempio

Il problema

Sia f una funzione continua con

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad e \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

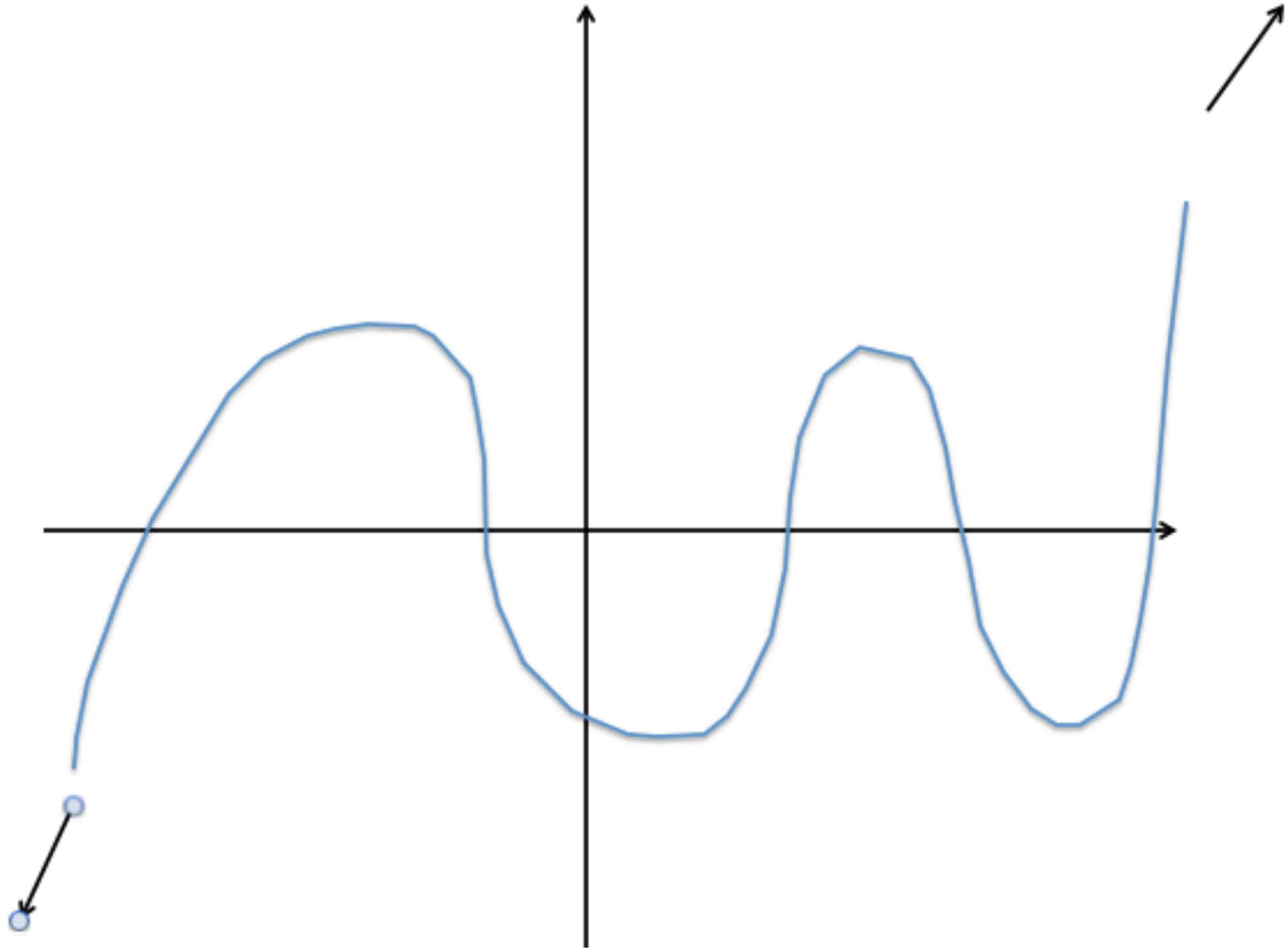
Provare che esiste almeno un punto c tale che f(c)=0.

FASE 1: CI

Episodio 1

1. (*Ivan legge il testo e dopo pochi secondi traccia gli assi x ed y, e poi due frecce che puntano in diagonale verso l'alto a destra, e verso il basso a sinistra; poi fa il gesto di unire con un dito le due frecce, attraversando lentamente e ripetutamente l'asse x; alla fine Ivan unisce le due frecce disegnando una linea oscillante*)

Esplorazione. Modalità ascendente1 (Gesti, Iscrizioni)



2. Beh, mi sembra che (...) Sì, si tratta di un caso del TVM.
Congettura 1. Modalità neutrale (Verbale)
3. TVM dice che io posso trovare c tale che f (c) = 0 (...)
Asserzione 1. Modalità neutrale (Verbale)

Episodio 2

4a Sì, ma come trovare *a* e *b*?
Domanda 2
4b In primo luogo, devo trovare *a* e *b*
(...)
5 e sfruttare la continuità
6 (*Ivan torna a guardare il disegno; un dito è sulla freccia dx, un altro dito su quella di sx; passano parecchi secondi*)
Modalità ascendente 2.1. Esplorazione (Verbale + Gest.)
7- Sì, il limite forse dice qualcosa. .
Congettura 2.1 Modalità neutrale (Verbale)

8- (*Ivan fa un movimento orizzontale con il dito che era sulla freccia di destra e attraversa tale freccia lentamente*)
Modalità ascendente 2.2. Esplorazione (Gest)
9a- Se prendo un valore di y, la funzione deve essere al di sopra di tale valore quando x è abbastanza grande.
Congettura 2.2 Modalità neutrale (Verbale)

Episodio 3

9b- Ma come trovare un x abbastanza grande da andare bene? (...) Domanda 3
10 a - Prima devo trovare un valore di y.
Modalità discendente 3.1. Piano (Verbale)
10 b - Ma il valore di y è qualunque (...)
11- Qualunque sia M, prendo M e posso trovare T tale che per ogni x> T (...)
Asserzione. Modalità neutrale (Verbale)

FASE 1: componente di investigazione

Episodio	Riga	Azione	Modalità 1	Modalità 2	Osservazioni
1					
	0	D1		Verbale	Consegna scritta
	1	Esplorazione	Ascendente	Gesturale	
	2	Congettura	Neutrale	Verbale	
	3	Statement	Neutrale	Verbale	Stabilisce lo scopo dell'indagine
2					
	4a	D2	Domandaing	Verbale	
	4b-6	Esplorazione	Ascendente	Gest. + Verb	
	7	Congettura	Neutrale	Verbale	
	8	Esplorazione	Ascendente	Gesturale	
	9a	Congettura	Neutrale	Verbale	
3					
	9b	Domanda	Domandare	Verbale	
	10a	Piano	Discendente	Verbale	
	10b-12	Esplorazione	Ascendente	Verb.+ Gest.	
	13a	Congettura	Neutrale	Verbale	
	13b	Piano	Discendente	Verbale	
	14	Passo loc. ded.	Discendente	Verbale	Logica del NON (Arzarello & Sabena, 2011)

Sintesi

	Fase 1	Fase 2
Episodi	5	4
Categoria	#	#
Domande	5	0
Esplorazioni	3	0
Controllo silente	2	0
Congetture	5	0
Asserzioni	2	0
Piani	3	2
Controllo logico	1	5
Passo deduttivo	1	2
Catena deduttiva globale	0	4
Ascendente	5	0
Neutrale	5	0
Discendente	5	7
Distaccato	0	5

5.
La LI come strumento di progettazione didattica

Educare alla Razionalità

Il nostro obiettivo: coltivare in classe pratiche in cui si utilizza concretamente la Logica della ricerca.

È un modo per stimolare e supportare studenti alla produzione di dimostrazioni: infatti permette loro di familiarizzarsi sia con regole definitorie sia con regole strategiche apprendendo una varietà di *stili dimostrativi* attraverso la pratica.

Sono così stati elaborati due tipi di progetti didattici:

a. Il cosiddetto Metodo della Ricerca Variata

b. Giochi basati su teoremi geometrici da dimostrare in cui la vittoria del Verificatore è garantita dalla verità del teorema su cui si basa il gioco. I giochi si svolgono in ambienti DGE.

5a.
Il metodo della ricerca variata
MRV

Passo 1:
"Quali risposte sono possibili?"

Scarabocchiando dei conti ho prodotto questa configurazione:

1 • 3	3
2 • 4	8
3 • 5	15
4 • 6	24
5 • 7	35

DOMANDA 1 (D1) : *"Che cosa osservate?"*

Esempi di risposte:

O1. Ci sono sempre due fattori, che riproducono la successione dei naturali partendo da 1 e da 3.

O2. In ogni uguaglianza i fattori differiscono di 2.

O3. I prodotti ottenuti (3, 8, 15, 24, 35) sono quasi quadrati perfetti: manca 1 per ottenerli.

O4. Anche le differenze tra i prodotti formano uno schema interessante:

8 - 3	5
15 - 8	7
24 - 15	9
35 - 24	11

O5. …

Si può anche usare un foglio excel:

1	3	3	4
2	4	8	9
3	5	15	16
4	6	24	25
5	7	35	36
6	8	48	49
7	9	63	64
8	10	80	81
9	11	99	100
10	12	120	121
11	13	143	144
12	14	168	169
13	15	195	196
14	16	224	225
15	17	255	256

Passo 2: “Come sarebbe se … ?”

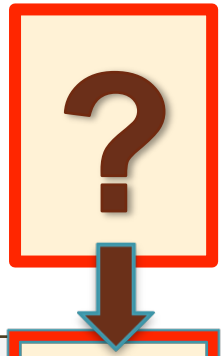
Cambiamo per es. la O2: supponiamo ora che i fattori differiscano di 4 [$(\sim O2)_4$]. Otteniamo:

1 • 5	5
2 • 6	12
3 • 7	21
4 • 8	32
5 • 9	45

Ricordando l’osservazione O3 ci si domanda (D1)*:

- e i quadrati?
- ci saranno ancora?
- li possiamo scoprire di nuovo?

A caccia dei quadrati (D2):



1 • 5	5
2 • 6	12
3 • 7	21
4 • 8	32
5 • 9	45

1 • 5	5	4 + 1	9 – 4
2 • 6	12	9 + 3	16 - 4
3 • 7	21	16 + 5	25 - 4
4 • 8	32	25 + 7	36 - 4
5 • 9	45	36 + 9	49 - 4

Con il linguaggio algebrico si può spiegare il perché delle regolarità:

n	n+2	n(n+2)	n(n+2)+1	(n+1)	(n+1)^2
1	3	3	4	2	4
2	4	8	9	3	9
3	5	15	16	4	16
4	6	24	25	5	25
5	7	35	36	6	36
6	8	48	49	7	49
7	9	63	64	8	64
8	10	80	81	9	81
9	11	99	100	10	100
10	12	120	121	11	121

$$n(n+2)+1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Riassumiamo in uno schema quanto abbiamo fatto:

I. Una situazione: osservare (Oi), formulare domande (Dj), dare risposte (Rk)

II. Modificare una (o più) Oi negandola (quindi variando la situazione) → $(\sim Oi)_k$.

III. Nascono nuove osservazioni (Oi)*, ulteriori domande (Dj)*, e risposte (Rk)*.

Perché è così?

Che cosa capita se non è così?

L'intero processo può essere così schematizzato attraverso vari livelli (*metodo della ricerca variata*, **MRV**):

Livello 0. Scegliere un punto di partenza

Livello 1. Fare l'elenco degli attributi (Oi); fare domande (Dj)?

Livello 2. Che cosa capita se non è così (~Oi)

Livello 3. Porre conseguenti questioni/ problemi (Dj)*?

Livello 4. Analizzare le (Dj)*

Livello 5. Metariflessione:

Se (~ Oi) allora (Dj)*? → (Rk)*

Se (Oi) allora (Dj)? → (Rk)

} → CD/CI

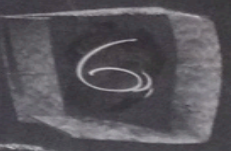
Se i fattori ~~hanno distanza~~ distano 2 tra loro allora aggiungendo 1 al prodotto si ottiene un q.P

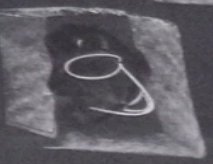
Se i fattori distano 4 tra loro allora aggiungendo 4 al prodotto otteniamo un quadrato p.

Qualsiasi

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad d \in P$ (numeri pari)

$\frac{d}{2} \in \mathbb{N}$ ← appartiene

Se i pattoni distano  tra loro

allora aggiungerlo  al

podetto ottenere un q. p.

5b.
Giochi di interazione strategica

Il lavoro in classe

1. Presentazione della **Logica della Scoperta** attraverso la proiezione e l'analisi di uno spezzone del primo episodio della serie 'Sherlock': ricostruzione del ragionamento di Sherlock in forma deduttiva.

2. Discussione su analogie e differenze tra il ragionamento di Sherlock e il ragionamento matematico.

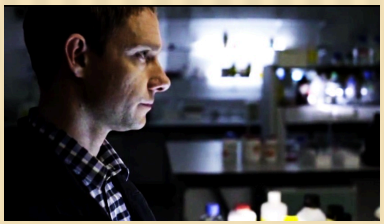
3. I giochi di interazione strategica: strategie e ragionamenti.

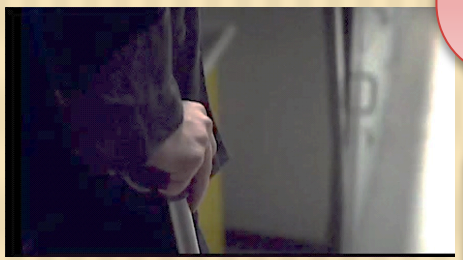
Si pone implicitamente una domanda

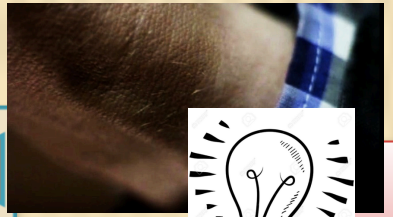
Chi è quest'uomo?

Osserva particolari

- Taglio dei capelli
- Portamento
- Infortunio alla gamba
- Abbronzato fino ai polsi
- Frase: "È molto diverso dai miei tempi"







Pensa ai fatti noti

C'è stata una guerra in Afghanistan e in Iraq

Probabile spiegazione dei particolari osservati

Medico militare che è stato ferito in Afghanistan o Iraq

Formulazione della strategia vincente, utilizzando la teoria dei quadrilateri

Giustificazione della strategia

Scheda di lavoro

Rispondete a questa domanda solo se pensate che il giocatore X abbia la possibilità di vincere sempre:

Come deve essere modificato il quadrilatero affinché il giocatore X raggiunga l'obiettivo?

Perché in questo modo i punti G, E, F coincidono?

Rispondete a questa domanda solo se pensate che esistano posizioni del punto D che impediscono al giocatore X di vincere sempre:

Come deve essere modificato il quadrilatero affinché il giocatore X non possa mai raggiungere l'obiettivo? Perché in questo modo i punti G, E, F NON coincidono?

Comprensione della relazione di conseguenza logica

Scheda di lavoro

3. Formulate alcuni enunciati veri relativi alle diagonali dei quadrilateri.
   Gli enunciati devono essere dei tipi seguenti:

$$A \Rightarrow B$$
$$A \Leftrightarrow B$$
$$B \Rightarrow A$$

A:

Le diagonali si tagliano vicendevolmente a metà

B:

Il quadrilatero è un rettangolo
Il quadrilatero è un quadrato
Il quadrilatero è trapezio
Il quadrilatero è un parallelogramma
Il quadrilatero è un rombo

6.
Un esercizio

Il signor Rossi e sua moglie organizzano una festa e invitano 4 coppie di coniugi. Non tutti gli ospiti si conoscono. Solo quelli che non si conoscono si stringono la mano. Il signor Rossi chiede a tutti i partecipanti alla festa quante volte hanno stretto la mano. Poi fa notare non ci sono 2 persone che abbiano detto lo stesso numero. Che numero ha detto la signora Rossi?

Note: Ognuno conosce se stesso e il suo partner. Se A ha stretto la mano a B allora, ovviamente, anche B ha stretto la mano ad A. Il Sig. Rossi non ha fatto la domanda a se stesso. Si suppone che ognuno ricordi il numero delle strette di mano date e che nessuno menta rispondendo.

Analisi con CI/CD

1. Come descrivo la situazione?

Se le 11 risposte sono diverse, essendo 10 il max valore valore possibile, allora le risposte sono state 0, 1, …10.

1. Numero 0,…10 gli invitati; rimane X

2. Analizzo il 10: ha stretto la mano a 10 persone diverse; lui con le 10 fa 11; ne rimane fuori 1

3. Che numero ha?

0 perché le altre hanno un numero >0

4. Quindi ho la prima coppia marito-moglie (10,0)

10. Quindi la seconda coppia è (9,1)

11. Che la terza coppia sia (8,2)?

12. Adattare il ragionamento di sopra a questo caso

13. La terza coppia è (7,3); la quarta (6,4); la quinta (5,5)

14. Dove sono X e moglie?

C'è un doppio numero 5: uno non ha dato la risposta a X. Quindi X ha stretto la mano a 5 persone ma non si è risposto. Sua moglie è 5.

5. Come descrivo la situazione?

Se le 11 risposte sono diverse, essendo 10 il max valore valore possibile, allora le risposte sono state 0, 1, …10.

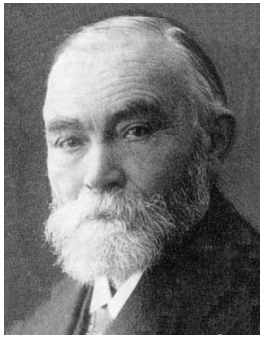
6. Numero 0,…10 gli invitati; rimane X

7. Analizzo il 10: ha stretto la mano a 10 persone diverse; lui con le 10 fa 11; ne rimane fuori 1

8. Che numero ha?

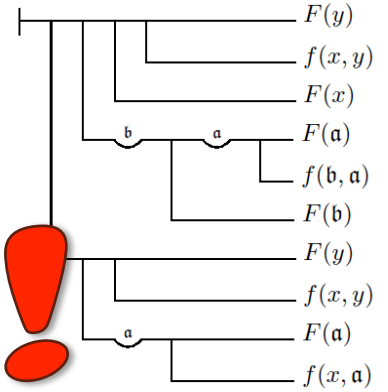
0 perché le altre hanno un numero >0

9. Quindi ho la prima coppia marito-moglie (10,0)

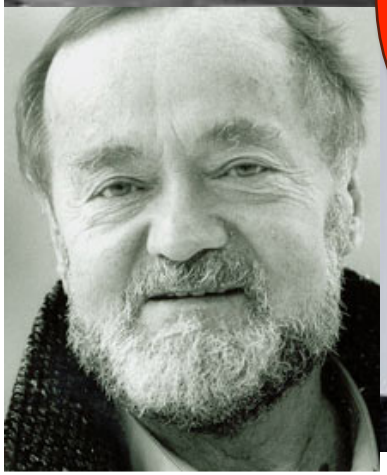


BEGRIFFSSCHRIFT,
EINE DER ARITHMETISCHEN NACHGEBILDETE
FORMELSPRACHE
DES REINEN DENKENS.
Dr GOTTLOB FREGE.
HALLE a/S.
VERLAG VON LOUIS NEBERT.
1879.

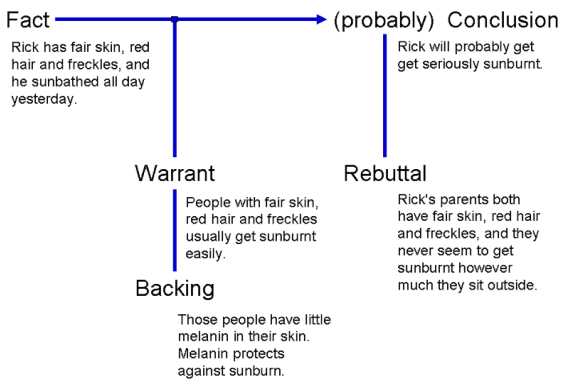
Sign Vehicle
Interpretant
Sign
Object

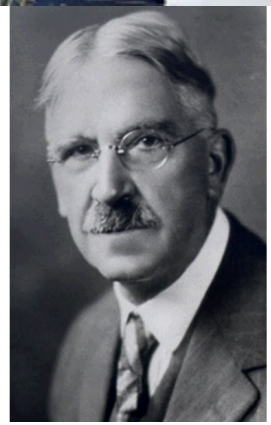

$F(y)$
$f(x,y)$
$F(x)$
b
a
$F(\mathfrak{a})$
$f(\mathfrak{b},\mathfrak{a})$
$F(\mathfrak{b})$
$F(y)$
$f(x,y)$
a
$F(\mathfrak{a})$
$f(x,\mathfrak{a})$

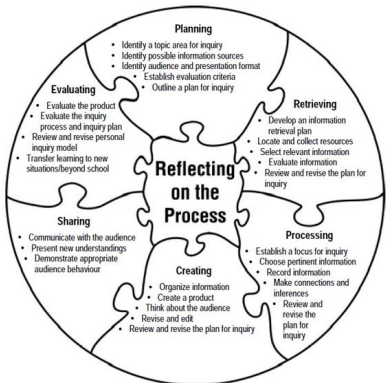
Grazie!



No tengo respuestas para casi nada
y sin embargo tengo preguntas para
casi todo


Fact
Rick has fair skin, red hair and freckles, and he sunbathed all day yesterday.
(probably) Conclusion
Rick will probably get get seriously sunburnt.
Warrant
People with fair skin, red hair and freckles usually get sunburnt easily.
Backing
Those people have little melanin in their skin. Melanin protects against sunburn.
Rebuttal
Rick's parents both have fair skin, red hair and freckles, and they never seem to get sunburnt however much they sit outside.




Inquiry Model
Planning
Identify a topic area for inquiry
Identify possible information sources
Identify audience and presentation format
Establish evaluation criteria
Outline a plan for inquiry
Retrieving
Develop an information retrieval plan
Locate and collect resources
Select relevant information
Evaluate information
Review and revise the plan for inquiry
Processing
Establish a focus for inquiry
Choose pertinent information
Record information
Make connections and inferences
Review and revise the plan for inquiry
Creating
Organize information
Create a product
Think about the audience
Revise and edit
Review and revise the plan for inquiry
Sharing
Communicate with the audience
Present new understandings
Demonstrate appropriate audience behaviour
Evaluating
Evaluate the product
Evaluate the inquiry process and inquiry plan
Review and revise personal inquiry model
Transfer learning to new situations/beyond school
Reflecting on the Process

Il problema

Sia f una funzione continua con

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad e \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

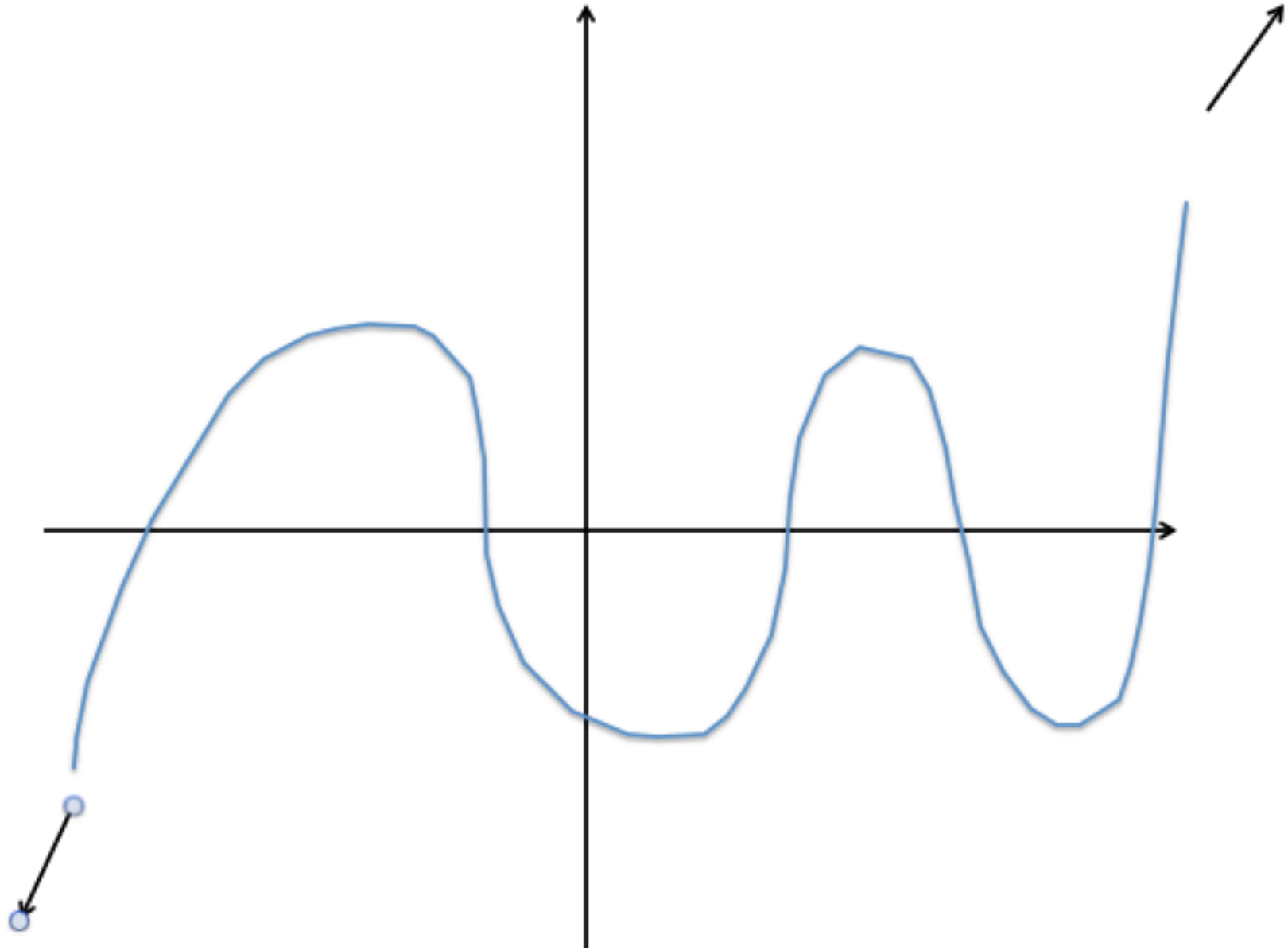
Provare che esiste almeno un punto c tale che f(c)=0.

FASE 1: CI

Episodio 1

1. (*Ivan legge il testo e dopo pochi secondi traccia gli assi x ed y, e poi due frecce che puntano in diagonale verso l'alto a destra, e verso il basso a sinistra; poi fa il gesto di unire con un dito le due frecce, attraversando lentamente e ripetutamente l'asse x; alla fine Ivan unisce le due frecce disegnando una linea oscillante*)

Esplorazione. Modalità ascendente1 (Gesti, Iscrizioni)



2. Beh, mi sembra che (...) Sì, si tratta di un caso del TVM.
Congettura 1. Modalità neutrale (Verbale)
3. TVM dice che io posso trovare c tale che f (c) = 0 (...)
Asserzione 1. Modalità neutrale (Verbale)

Episodio 2

4a Sì, ma come trovare *a* e *b*?
Domanda 2
4b In primo luogo, devo trovare *a* e *b*
(...)
5 e sfruttare la continuità
6 (*Ivan torna a guardare il disegno; un dito è sulla freccia dx, un altro dito su quella di sx; passano parecchi secondi*)
Modalità ascendente 2.1. Esplorazione (Verbale + Gest.)
7- Sì, il limite forse dice qualcosa. .
Congettura 2.1 Modalità neutrale (Verbale)

8- (*Ivan fa un movimento orizzontale con il dito che era sulla freccia di destra e attraversa tale freccia lentamente*)
Modalità ascendente 2.2. Esplorazione (Gest)
9a- Se prendo un valore di y, la funzione deve essere al di sopra di tale valore quando x è abbastanza grande.
Congettura 2.2 Modalità neutrale (Verbale)

Episodio 3

9b- Ma come trovare un x abbastanza grande da andare bene? (...) Q 3
10 a - Prima devo trovare un valore di y.
Modalità discendente 3.1. Piano (Verbale)
10 b - Ma il valore di y è qualunque (...)
11- Qualunque sia M, prendo M e posso trovare T tale che per ogni x> T (...)
Asserzione. Modalità neutrale (Verbale)

12- (*Ivan fa di nuovo un movimento orizzontale con il dito che attraversa la freccia di destra*)

Modalità ascendente 3. Esplorazione (Gest)

13a- Questo potrebbe essere il valore di M, il valore di y,

Congettura 3. (Verbal)

13b- Poi trovo il valore di x, il valore di x che è b, tale che se x> b ho f (x)> M

Modalità discendente 3.2. Piano (Verbale)

14- Ma ho f (x)> M, non f (x) = M

Modalità discendente 3.3. Passo logico deduttivo (logica del NO). (Verbae)

Episodio 4

15 È f (b)=M?

Modalità Ascendente. Domanda 4.1

(…)

Modalità discendente. Controllo silenzioso

16 – Non è sicuro! (...)

Modalità discendente. Controllo (Verbale)

17- Potrei prendere un punto x' tale che f(x')> M: quel punto lì è l'estremità dell'intervallo di destra, è il b che mi serve!

Congettura 4. Modalità discendente (Verbale)

Episodio 5

18 Ma perché f(x ')> 0?

Modalità Ascendente. Domanda 5 (Verbale)

19 Sì, devo prendere M> 0! Ma M è un numero, un numero qualsiasi!

Piano. Modalità discendente (Verbale)

20 A sinistra è lo stesso: trovo x" tale che f (x") <0.

Passo deduttivo globale (ragionamento per simmetria).

Modalità discendente (Verbale)

21a L'intervallo per il TVM è [x', x"].

Asserzione 2. (Verbale). Conclude I 5 episodi della fase di investigazione.

FASE 2: componente deduttiva

Episodio 6

21b- Scriviamo la dimostrazione:

Piano. Modalità discendente (Verbale)

A livello illocutorio [Austin, 1975] l'affermazione 21b significa che la Congettura 1 è confermata dalle risposte alle domande poste nei 5 episodi.

La fase di investigazione può terminare (al momento)

22- (*Ivan parla e poi detta a se stesso quello che vuole scrivere*)
23- **Grazie alla continuità di *f* e a TVM, f (x ') f (x ") <0 implica che esiste c in (x', x") tale che f (c) = 0**
Catena deduttiva globale 1: trasposizione a un livello logico dei risultati della fase di investigazione. Modalità distaccata (Verbale)

Episodio 7

24- No, non funziona ancora! Devo tornare indietro a come trovare x' tale che. Non a come trovare, ma a perché posso trovarlo! Per I limiti! Come scriverlo bene?
Controllo logico 1. Modalità discendente (Verbale)
25- **Grazie alle ipotesi sui limiti, dato M> 0 posso trovare x'> 0 tale che (…)**
Passo deduttivo locale. Modalità distaccata (Verbale)

26- No, ancora non funziona! Ho bisogno di ritornare a come potrei trovare x '> 0 tale che! No, non come, ma perché posso trovarlo! Grazie ai limiti! Come scrivere bene?

Controllo logico 2. Modalità discendente (Verbale)

27- **Grazie alla ipotesi sui limiti, dato M> 0 io posso trovare x '> 0 tale che**

(...)

Controllo logico 3. Modalità discendente (Verbale)

28- No: posso trovare x_M tale che per ogni x> x_M ho f (x)> M

Controllo logico 4. Modalità discendente (Verbale)

Episodio 8

29- (*Ivan traccia una riga su tutto ciò che ha scritto finora, e ricomincia a dettare a se stesso e a scrivere*):

30- **Grazie alle ipotesi sui limiti, dato M> 0 posso trovare x_M tale che per ogni x> x_M ho f(x)> M. Prendo un punto x' > X_M. f (x')> M> 0.**

Catena deduttiva globale 2: raffinamento della precedente trasposizione a un livello logico del risultato degli epsodi investigativi. Modalità discendente (Verbale)

31 Bene, ora funziona.

Controllo logico 1. Modalità discendente (Verbale)

32- **Allo stesso modo trovo x" tale che f (x") <0.**

Passo deduttivo globale. Modalità distaccata (ragionamento per simmetria) (Verbale)

(...)

33- **Esiste un punto c, x "<c <x ', tale che f (c) = 0**
Catena deduttiva globale 3: riformulazione della catene deduttive globali precedenti in cui alcune delle ipotesi precedentemente fatte sono implicite. Modalità distaccata (Verbale)

Episodio 9

(...)
34- No, questa è la conclusione, prima devo scrivere l'ipotesi e poi la conclusione
Piano. Modalità discendente (Verbale)

35- (*Ivan traccia una riga sull'ultima linea, [la 33a], detta a se stesso e scrive*):

36- **Ora posso applicare il TVM alla funzione f continua nell'intervallo (x ", x '): f (x") f (x') <0, quindi c esiste nell'intervallo (x ", x '), tale che f (c) = 0**

Catena deduttiva globale 4: riformulazione delle catene deduttive globali precedenti. Modalità distaccata (Verbale).

FASE 1: componente di investigazione

Episodio	Riga	Azione	Modalità 1	Modalità 2	Osservazioni
1					
	0	Q1		Verbale	Consegna scritta
	1	Esplorazione	Ascendente	Gesturale	
	2	Congettura	Neutrale	Verbale	
	3	Statement	Neutrale	Verbale	Stabilisce lo scopo dell'indagine
2					
	4a	Q2	Domandaing	Verbale	
	4b-6	Esplorazione	Ascendente	Gest. + Verb	
	7	Congettura	Neutrale	Verbale	
	8	Esplorazione	Ascendente	Gesturale	
	9a	Congettura	Neutrale	Verbale	
3					
	9b	Domanda	Domandare	Verbale	
	10a	Planning	Discendente	Verbale	
	10b-12	Esplorazione	Ascendente	Verb.+ Gest.	
	13a	Congettura	Neutrale	Verbale	
	13b	Planning	Discendente	Verbale	
	14	Passo loc. ded.	Discendente	Verbale	Logica del NON (Arzarello & Sabena, 2011)

FASE 1: componente di investigazione

Episodio	Riga	Azione principale	Modalità 1	Modalità 2	Osservazioni
4					
	15a	Domanda	Domandare	Verbale	
	15b	Controllo silenzioso	Ascendente	Silenzio	Controllo di una congettura
	16	Controllo silenzioso	Ascendente	Silenzio	La parte verbale è un metacommento
	17	Congettura	Neutrale	Verbale	Osservazioni
5					
	18	Domanda	Domandare	Verbale	
	19	Piano	Discendente	Verbale	
	20	Passo deduttivo globale	Discendente	Verbale	Ragionamento per simmetria
	21a	Statement	Neutrale	Verbale	Lo scopo della riga 3 è raggiunto
Conclusione della fase di investigazione					

FASE 2: componente deduttiva

Episodio	Riga	Azione principale	Modalità 1	Modalità 2	Osservazioni
6					
	21b	Piano	Discendente	Verbale	A livello illocutorio stabilise che la fase di investigazione è conclusa
	22-23	Catena globale deduttiva	Detached	Verbale + scritto	
7					
	24	Controllo logico	Discendente	Verbale	Comincia una dialettica tra controllo logico e formulazione deduttiva
	25	Passo locale deduttivo step	Detached	Verbale + scritto	La dialettica continua
	26	Controllo logico	Discendente	Verbale	
	27	Controllo logico	Discendente	Verbale + scritto	
	28	Controllo logico	Discendente	Verbale	
Fine					

FASE 2: componente deduttiva

Episodio	Riga	Azione principale	Modalità 1	Modalità 2	Osservazioni
8					
	29-30	Catena deduttiva globale	Distaccato	Verbale + scritto	Un primo raffinamento di 23.
	31	Controllo logico	Discendente	Verbale	Presenti aspetti comunicativi
	32	Passo deduttivo	Distaccato	Verbale + scritto	Ragionamento per simmetria
	33	Catena deduttiva globale	Distaccato	Verbale + scritto	Un raffinamento di 23 + 30
9					
	34	Planning	Discendente	Verbale	
	35-36	Catena deduttiva globale	Distaccato	Verbale + scritto	Un raffinamento di 23 + 30 +33 (cancellazione)
Fine					

Il signor Rossi e sua moglie organizzano una festa e invitano 4 coppie di coniugi. Non tutti gli ospiti si conoscono. Solo quelli che non si conoscono si stringono la mano. Il signor Rossi chiede a tutti i partecipanti alla festa quante volte hanno stretto la mano. Poi fa notare non ci sono 2 persone che abbiano detto lo stesso numero. Che numero ha detto la signora Rossi?

Note: Ognuno conosce se stesso e il suo partner. Se A ha stretto la mano a B allora, ovviamente, anche B ha stretto la mano ad A. Il Sig. Rossi non ha fatto la domanda a se stesso. Si suppone che ognuno ricordi il numero delle strette di mano date e che nessuno menta rispondendo.

1. Come descrivo la situazione?

Se le 11 risposte sono diverse, essendo 10 il max valore valore possibile, allora le risposte sono state 0, 1, …10.

1. Numero 0,…10 gli invitati; rimane X

2. Analizzo il 10: ha stretto la mano a 10 persone diverse; lui con le 10 fa 11; ne rimane fuori 1

3. Che numero ha?

0 perché le altre hanno un numero >0

4. Quindi ho la prima coppia marito-moglie (10,0)

5. Chi considero ora?

Il 9

6. Ci sono tre persone analizzate: 10, 0, 9.

Il 9 dà la mano a 10

7. Chi è sua moglie?

Non è 0, non è 9, ha dato la mano a 10…STALLO

8. Chi considero?

1: ha dato la mano a 10; quindi non dà la mano ad altri in particolare a 9; 9 dà la mano a 9 persone; non la dà a 0, 1, se stesso. Siccome questi sono tre, dà la mano a tutti gli altri. Sua moglie non è 0; quindi è 1.

9. Quindi la seconda coppia è (9,1)

10. Che la terza coppia sia (8,2)?

11. Adattare il ragionamento di sopra a questo caso

12. La terza coppia è (7,3); la quarta (6,4); la quinta (5,5)

13. Dove sono X e moglie?
C'è un doppio numero 5: uno non ha dato la risposta a X. Quindi X ha stretto la mano a 5 persone ma non si è risposto. Sua moglie è 5.