Cavalieri, Paggi e Furfanti

La Logica e le Olimpiadi

Luigi Amedeo Bianchi
Universität Augsburg e Commissione Olimpiadi UMI

Educare alla Razionalità – Sestri Levante, 10.06.2016

- Le Olimpiadi di matematica sono gare di soluzione di problemi matematici.
- Sono rivolte a studenti delle scuole superiori.

Divulgazione

<————————

Giochi di Archimede –> Gara Provinciale –> Finale Nazionale

————————>

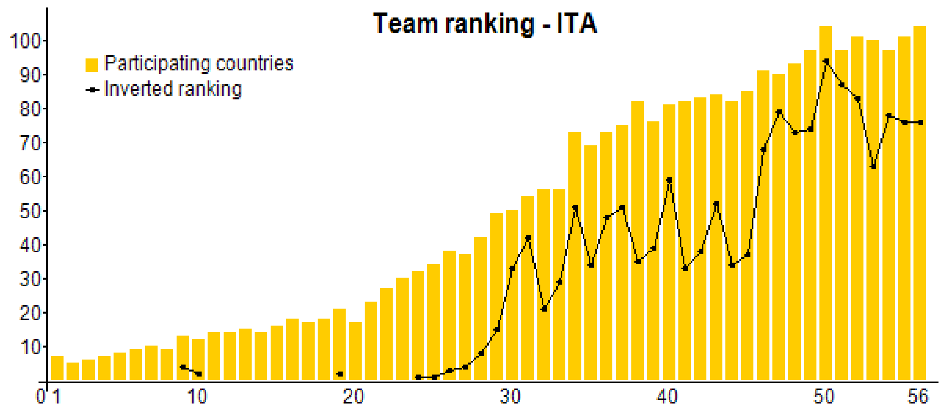
Selezione

250’000	12’000	300
Novembre	Febbraio	Maggio
biennio $\neq$ triennio	biennio = triennio	
16-20 r. multiple	12 r. multiple	0 r. multiple
0 dimostrativi	3 dimostrativi	6 dimostrativi

- Gare a squadre, stage locali.
- Stage avanzati, gare internazionali.

Prima edizione 1959 in Romania, 7 squadre, 52 concorrenti.

Edizione 2015 in Thailandia, 104 squadre, 577 concorrenti.



Immagini da Wikimedia Commons. Risultati italiani alle IMO

- Scopi antitetici?

- Scopi antitetici?
- Test a tempo (cfr. Jo Boaler).

- Scopi antitetici?
- Test a tempo (cfr. Jo Boaler).
- Aspetto ludico, di curiosità e di scoperta.

- Scopi antitetici?
- Test a tempo (cfr. Jo Boaler).
- Aspetto ludico, di curiosità e di scoperta.
- Più si prosegue più le Olimpiadi si allontanano dalla scuola e si avvicinano allo sport (allenamenti specifici, partecipazione a stage e gare...).

- Scopi antitetici?
- Test a tempo (cfr. Jo Boaler).
- Aspetto ludico, di curiosità e di scoperta.
- Più si prosegue più le Olimpiadi si allontanano dalla scuola e si avvicinano allo sport (allenamenti specifici, partecipazione a stage e gare...).
- Olimpiadi $\subsetneq$ matematica.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25

- Scopi antitetici?
- Test a tempo (cfr. Jo Boaler).
- Aspetto ludico, di curiosità e di scoperta.
- Più si prosegue più le Olimpiadi si allontanano dalla scuola e si avvicinano allo sport (allenamenti specifici, partecipazione a stage e gare...).
- Olimpiadi $\subsetneq$ matematica.
- Valorizzazione dell'interesse e delle eccellenze.

- Unico contatto con la matematica olimpica per il 95% dei partecipanti.

- Unico contatto con la matematica olimpica per il 95% dei partecipanti.
- Estrema variabilità delle conoscenze pregresse.

- Unico contatto con la matematica olimpica per il 95% dei partecipanti.
- Estrema variabilità delle conoscenze pregresse.
- Il problema del biennio.

- Unico contatto con la matematica olimpica per il 95% dei partecipanti.
- Estrema variabilità delle conoscenze pregresse.
- Il problema del biennio.
- Difficoltà: trovare esercizi non banali, interessanti, parzialmente risolubili da tutti, capaci di mettere alla prova su tutti i livelli.

- Unico contatto con la matematica olimpica per il 95% dei partecipanti.
- Estrema variabilità delle conoscenze pregresse.
- Il problema del biennio.
- Difficoltà: trovare esercizi non banali, interessanti, parzialmente risolubili da tutti, capaci di mettere alla prova su tutti i livelli.
- Come si fa una gara?
  - Proposte dei problemi.

- Unico contatto con la matematica olimpica per il 95% dei partecipanti.
- Estrema variabilità delle conoscenze pregresse.
- Il problema del biennio.
- Difficoltà: trovare esercizi non banali, interessanti, parzialmente risolubili da tutti, capaci di mettere alla prova su tutti i livelli.
- Come si fa una gara?
  - Proposte dei problemi.
  - Valutazione “assoluta” delle proposte (2 dimensioni).

- Unico contatto con la matematica olimpica per il 95% dei partecipanti.
- Estrema variabilità delle conoscenze pregresse.
- Il problema del biennio.
- Difficoltà: trovare esercizi non banali, interessanti, parzialmente risolubili da tutti, capaci di mettere alla prova su tutti i livelli.
- Come si fa una gara?
  - Proposte dei problemi.
  - Valutazione “assoluta” delle proposte (2 dimensioni).
  - Rielaborazione e shortlist.

- Unico contatto con la matematica olimpica per il 95% dei partecipanti.
- Estrema variabilità delle conoscenze pregresse.
- Il problema del biennio.
- Difficoltà: trovare esercizi non banali, interessanti, parzialmente risolubili da tutti, capaci di mettere alla prova su tutti i livelli.
- Come si fa una gara?
  - Proposte dei problemi.
  - Valutazione "assoluta" delle proposte (2 dimensioni).
  - Rielaborazione e shortlist.
  - Valutazione "relativa" e testo finale.

- Unico contatto con la matematica olimpica per il 95% dei partecipanti.
- Estrema variabilità delle conoscenze pregresse.
- Il problema del biennio.
- Difficoltà: trovare esercizi non banali, interessanti, parzialmente risolubili da tutti, capaci di mettere alla prova su tutti i livelli.
- Come si fa una gara?
  - Proposte dei problemi.
  - Valutazione "assoluta" delle proposte (2 dimensioni).
  - Rielaborazione e shortlist.
  - Valutazione "relativa" e testo finale.
  - Preparazione marking scheme.

- Con “logica” nel gergo olimpico si indicano esercizi di valutazione della verità di proposizioni, contenenti negazioni, connettivi e quantificatori, ma anche gli esercizi di insiemistica.

- Con “logica” nel gergo olimpico si indicano esercizi di valutazione della verità di proposizioni, contenenti negazioni, connettivi e quantificatori, ma anche gli esercizi di insiemistica.
- Sono pensate non per mettere alla prova le conoscenze, ma la capacità di ragionare ed argomentare.

- Con “logica” nel gergo olimpico si indicano esercizi di valutazione della verità di proposizioni, contenenti negazioni, connettivi e quantificatori, ma anche gli esercizi di insiemistica.
- Sono pensate non per mettere alla prova le conoscenze, ma la capacità di ragionare ed argomentare.
- Le tradizionali materie olimpiche sono: geometria, algebra, teoria dei numeri e combinatoria.

- Con "logica" nel gergo olimpico si indicano esercizi di valutazione della verità di proposizioni, contenenti negazioni, connettivi e quantificatori, ma anche gli esercizi di insiemistica.
- Sono pensate non per mettere alla prova le conoscenze, ma la capacità di ragionare ed argomentare.
- Le tradizionali materie olimpiche sono: geometria, algebra, teoria dei numeri e combinatoria.
- Non compare tra le quattro materie tradizionali perché non è presente nelle gare internazionali. Non si presta bene ad esercizi dimostrativi che possano essere valutati sull'intero spettro dei 7 punti.

- Con “logica” nel gergo olimpico si indicano esercizi di valutazione della verità di proposizioni, contenenti negazioni, connettivi e quantificatori, ma anche gli esercizi di insiemistica.
- Sono pensate non per mettere alla prova le conoscenze, ma la capacità di ragionare ed argomentare.
- Le tradizionali materie olimpiche sono: geometria, algebra, teoria dei numeri e combinatoria.
- Non compare tra le quattro materie tradizionali perché non è presente nelle gare internazionali. Non si presta bene ad esercizi dimostrativi che possano essere valutati sull'intero spettro dei 7 punti.
- In realtà è componente fondamentale di ciascun esercizio: si richiedono dimostrazioni ed argomenti. In questo modo si possono valutare anche dimostrazioni parziali.

Problema. (Archimede 2009) Quattro amici, Anna, Bea, Caio e Dino, giocano a poker con 20 carte di uno stesso mazzo: i quattro re, le quattro regine, i quattro fanti, i quattro assi e i quattro dieci. Vengono distribuite cinque carte a testa.

Anna. "Io ho un poker."

Bea. "Io ho tutte e cinque le carte di cuori."

Caio. "Io ho cinque carte rosse."

Dino. "Io ho un full."

Una sola delle quattro persone sta mentendo. Chi è?

Problema. (Archimede 2009) Quattro amici, Anna, Bea, Caio e Dino, giocano a poker con 20 carte di uno stesso mazzo: i quattro re, le quattro regine, i quattro fanti, i quattro assi e i quattro dieci. Vengono distribuite cinque carte a testa.

Anna. "Io ho un poker."

Bea. "Io ho tutte e cinque le carte di cuori."

Caio. "Io ho cinque carte rosse."

Dino. "Io ho un full."

Una sola delle quattro persone sta mentendo. Chi è?

- Una tra Anna e Bea mente sicuramente.

Problema. (Archimede 2009) Quattro amici, Anna, Bea, Caio e Dino, giocano a poker con 20 carte di uno stesso mazzo: i quattro re, le quattro regine, i quattro fanti, i quattro assi e i quattro dieci. Vengono distribuite cinque carte a testa.

Anna. "Io ho un poker."

Bea. "Io ho tutte e cinque le carte di cuori."

Caio. "Io ho cinque carte rosse."

Dino. "Io ho un full."

Una sola delle quattro persone sta mentendo. Chi è?

- Una tra Anna e Bea mente sicuramente.
- Supponiamo sia Anna, allora Caio deve avere le cinque carte di quadri, il che rende impossibile per Dino avere un full.

Problema. (Archimede 2009) Quattro amici, Anna, Bea, Caio e Dino, giocano a poker con 20 carte di uno stesso mazzo: i quattro re, le quattro regine, i quattro fanti, i quattro assi e i quattro dieci. Vengono distribuite cinque carte a testa.

Anna. "Io ho un poker."

Bea. "Io ho tutte e cinque le carte di cuori."

Caio. "Io ho cinque carte rosse."

Dino. "Io ho un full."

Una sola delle quattro persone sta mentendo. Chi è?

- Una tra Anna e Bea mente sicuramente.
- Supponiamo sia Anna, allora Caio deve avere le cinque carte di quadri, il che rende impossibile per Dino avere un full.
- Deve allora essere Bea a mentire.

Problema. (Archimede 2009) Quattro amici, Anna, Bea, Caio e Dino, giocano a poker con 20 carte di uno stesso mazzo: i quattro re, le quattro regine, i quattro fanti, i quattro assi e i quattro dieci. Vengono distribuite cinque carte a testa.

Anna. "Io ho un poker."

Bea. "Io ho tutte e cinque le carte di cuori."

Caio. "Io ho cinque carte rosse."

Dino. "Io ho un full."

Una sola delle quattro persone sta mentendo. Chi è?

- Una tra Anna e Bea mente sicuramente.
- Supponiamo sia Anna, allora Caio deve avere le cinque carte di quadri, il che rende impossibile per Dino avere un full.
- Deve allora essere Bea a mentire.
- Controlliamo che le altre affermazioni siano compatibili: Anna ha, per esempio, poker di dieci e un fante di picche; Dino ha due regine nere e tre re, di cui due neri; Caio ha due fanti rossi, due regine rosse e un re rosso; Bea ha un poker d'assi e il fante di fiori.

Problema. (Archimede 2007) In un paese abitano solo furfanti, che mentono sempre, e cavalieri, che dicono sempre la verità. Un giornalista intervista quattro abitanti: Arturo, Bernardo, Carlo e Dario, che fanno le seguenti dichiarazioni:

Arturo. "Bernardo è un furfante."

Bernardo. "Io sono l'unico cavaliere tra noi quattro."

Carlo. "Almeno uno tra Arturo e Dario è un furfante."

Dario. "Siamo quattro cavalieri."

Quanti tra i quattro sono cavalieri?

Problema. (Archimede 2007) In un paese abitano solo furfanti, che mentono sempre, e cavalieri, che dicono sempre la verità. Un giornalista intervista quattro abitanti: Arturo, Bernardo, Carlo e Dario, che fanno le seguenti dichiarazioni:

Arturo. "Bernardo è un furfante."

Bernardo. "Io sono l'unico cavaliere tra noi quattro."

Carlo. "Almeno uno tra Arturo e Dario è un furfante."

Dario. "Siamo quattro cavalieri."

Quanti tra i quattro sono cavalieri?

- Come prima cerchiamo contraddizioni: Bernardo e Dario. Ma se Dario fosse cavaliere avremmo un assurdo, quindi Dario è un furfante.

Problema. (Archimede 2007) In un paese abitano solo furfanti, che mentono sempre, e cavalieri, che dicono sempre la verità. Un giornalista intervista quattro abitanti: Arturo, Bernardo, Carlo e Dario, che fanno le seguenti dichiarazioni:

Arturo. "Bernardo è un furfante."

Bernardo. "Io sono l'unico cavaliere tra noi quattro."

Carlo. "Almeno uno tra Arturo e Dario è un furfante."

Dario. "Siamo quattro cavalieri."

Quanti tra i quattro sono cavalieri?

- Come prima cerchiamo contraddizioni: Bernardo e Dario. Ma se Dario fosse cavaliere avremmo un assurdo, quindi Dario è un furfante.
- Carlo dice dunque il vero e, di conseguenza, Bernardo è un furfante e Arturo un cavaliere. I cavalieri sono dunque due.

Problema. (Febbraio 2014) I 60 abitanti di un villaggio possono essere di tre tipi: cavalieri, furfanti o paggi (che rispondono come vogliono). Se si esclude questo comportamento i membri di ciascuna fazione sono completamente indistinguibili da quelli delle altre. All'arrivo di un visitatore, si dispongono in circolo e ciascuno dichiara che l'abitante alla sua destra è un furfante. Quale delle seguenti frasi è necessariamente vera?

(A) C'è almeno un paggio. **(B)** I furfanti sono al più 20. **(C)** I cavalieri sono al più 30. **(D)** I paggi non sono più di 40. **(E)** Nessuna delle precedenti.

Problema. (Febbraio 2014) I 60 abitanti di un villaggio possono essere di tre tipi: cavalieri, furfanti o paggi (che rispondono come vogliono). Se si esclude questo comportamento i membri di ciascuna fazione sono completamente indistinguibili da quelli delle altre. All'arrivo di un visitatore, si dispongono in circolo e ciascuno dichiara che l'abitante alla sua destra è un furfante. Quale delle seguenti frasi è necessariamente vera?

(A) C'è almeno un paggio. **(B)** I furfanti sono al più 20. **(C)** I cavalieri sono al più 30. **(D)** I paggi non sono più di 40. **(E)** Nessuna delle precedenti.

- Proviamo a costruire dei controesempi (con metalivello).

Problema. (Febbraio 2014) I 60 abitanti di un villaggio possono essere di tre tipi: cavalieri, furfanti o paggi (che rispondono come vogliono). Se si esclude questo comportamento i membri di ciascuna fazione sono completamente indistinguibili da quelli delle altre. All'arrivo di un visitatore, si dispongono in circolo e ciascuno dichiara che l'abitante alla sua destra è un furfante. Quale delle seguenti frasi è necessariamente vera?

(A) C'è almeno un paggio. **(B)** I furfanti sono al più 20. **(C)** I cavalieri sono al più 30. **(D)** I paggi non sono più di 40. **(E)** Nessuna delle precedenti.

- Proviamo a costruire dei controesempi (con metalivello).
- Se abbiamo 30 cavalieri e 30 furfanti (configurazione ammessa) falsifichiamo **(A)** e **(B)**.

E i paggi?

Problema. (Febbraio 2014) I 60 abitanti di un villaggio possono essere di tre tipi: cavalieri, furfanti o paggi (che rispondono come vogliono). Se si esclude questo comportamento i membri di ciascuna fazione sono completamente indistinguibili da quelli delle altre. All'arrivo di un visitatore, si dispongono in circolo e ciascuno dichiara che l'abitante alla sua destra è un furfante. Quale delle seguenti frasi è necessariamente vera?

(A) C'è almeno un paggio. **(B)** I furfanti sono al più 20. **(C)** I cavalieri sono al più 30. **(D)** I paggi non sono più di 40. **(E)** Nessuna delle precedenti.

- Proviamo a costruire dei controesempi (con metalivello).
- Se abbiamo 30 cavalieri e 30 furfanti (configurazione ammessa) falsifichiamo **(A)** e **(B)**.
- Potremmo anche avere solo paggi che scelgono di mentire, falsificando la **(D)**.

Problema. (Febbraio 2014) I 60 abitanti di un villaggio possono essere di tre tipi: cavalieri, furfanti o paggi (che rispondono come vogliono). Se si esclude questo comportamento i membri di ciascuna fazione sono completamente indistinguibili da quelli delle altre. All'arrivo di un visitatore, si dispongono in circolo e ciascuno dichiara che l'abitante alla sua destra è un furfante. Quale delle seguenti frasi è necessariamente vera?

(A) C'è almeno un paggio. **(B)** I furfanti sono al più 20. **(C)** I cavalieri sono al più 30. **(D)** I paggi non sono più di 40. **(E)** Nessuna delle precedenti.

- Proviamo a costruire dei controesempi (con metalivello).
- Se abbiamo 30 cavalieri e 30 furfanti (configurazione ammessa) falsifichiamo **(A)** e **(B)**.
- Potremmo anche avere solo paggi che scelgono di mentire, falsificando la **(D)**.
- Per concludere: siccome per ogni cavaliere deve esserci un furfante, la **(C)** è vera.

Sono principalmente esercizi di inclusione/esclusione.

Sono principalmente esercizi di inclusione/esclusione.

Problema. (Archimede 2006) Tra i 200 alunni di una scuola, 150 hanno partecipato ad una gara di chimica e 130 hanno partecipato ad una gara di fisica. Quanti studenti hanno partecipato ad entrambe le gare?

Sono principalmente esercizi di inclusione/esclusione.

Problema. (Archimede 2006) Tra i 200 alunni di una scuola, 150 hanno partecipato ad una gara di chimica e 130 hanno partecipato ad una gara di fisica. Quanti studenti hanno partecipato ad entrambe le gare?

- Qui abbiamo una “trappola”: se lo studente cerca di costruire un esempio può farlo, ma la soluzione non è unica.

Sono principalmente esercizi di inclusione/esclusione.

> **Problema. (Archimede 2006)** Tra i 200 alunni di una scuola, 150 hanno partecipato ad una gara di chimica e 130 hanno partecipato ad una gara di fisica. Quanti studenti hanno partecipato ad entrambe le gare?

- Qui abbiamo una "trappola": se lo studente cerca di costruire un esempio può farlo, ma la soluzione non è unica.
- C'è anche un'ipotesi sottintesa: che esistano studenti che non hanno preso parte ad alcuna gara.

Sono principalmente esercizi di inclusione/esclusione.

> **Problema. (Archimede 2006)** Tra i 200 alunni di una scuola, 150 hanno partecipato ad una gara di chimica e 130 hanno partecipato ad una gara di fisica. Quanti studenti hanno partecipato ad entrambe le gare?

- Qui abbiamo una “trappola”: se lo studente cerca di costruire un esempio può farlo, ma la soluzione non è unica.
- C’è anche un’ipotesi sottintesa: che esistano studenti che non hanno preso parte ad alcuna gara.
- Un modo veloce per capire che la soluzione non può essere unica è scrivere il sistema in quattro incognite e tre equazioni e dedurne la non unicità.

- Strategia 1: affrontare i problemi lancia in resta.

- Strategia 1: affrontare i problemi lancia in resta.
- Subottimale localmente e globalmente.

- Strategia 1: affrontare i problemi lancia in resta.
- Subottimale localmente e globalmente.
- Dettagli ignorati (e.g. problemi di configurazione in geometria...)

- Strategia 1: affrontare i problemi lancia in resta.
- Subottimale localmente e globalmente.
- Dettagli ignorati (e.g. problemi di configurazione in geometria...)
- Strategia nella gara a squadre (7 ragazzi che collaborano, ciascuno con punti di forza e punti deboli).

- Strategia 1: affrontare i problemi lancia in resta.
- Subottimale localmente e globalmente.
- Dettagli ignorati (e.g. problemi di configurazione in geometria...)
- Strategia nella gara a squadre (7 ragazzi che collaborano, ciascuno con punti di forza e punti deboli).
- Strategia nell'allenamento e nella preparazione.

Problema. (Archimede 2008) Un pilota vuole stabilire un nuovo record su un percorso di 50 km: percorrerlo alla velocità media di 100 km/h. A causa di alcuni problemi tecnici, tuttavia, impiega 48 minuti per percorrere i primi 24 km. Supponendo che proceda poi a velocità costante per il resto del percorso, quale deve essere tale velocità per stabilire il record?

(A) 60 km/h **(B)** 120 km/h **(C)** 150 km/h **(D)** 170 km/h **(E)** Non è possibile.

Problema. (Archimede 2008) Un pilota vuole stabilire un nuovo record su un percorso di 50 km: percorrerlo alla velocità media di 100 km/h. A causa di alcuni problemi tecnici, tuttavia, impiega 48 minuti per percorrere i primi 24 km. Supponendo che proceda poi a velocità costante per il resto del percorso, quale deve essere tale velocità per stabilire il record?

(A) 60 km/h **(B)** 120 km/h **(C)** 150 km/h **(D)** 170 km/h **(E)** Non è possibile.

- Prima idea: $48 = 2 \cdot 24$, quindi la velocità media della prima parte è 30 km/h.

Problema. (Archimede 2008) Un pilota vuole stabilire un nuovo record su un percorso di 50 km: percorrerlo alla velocità media di 100 km/h. A causa di alcuni problemi tecnici, tuttavia, impiega 48 minuti per percorrere i primi 24 km. Supponendo che proceda poi a velocità costante per il resto del percorso, quale deve essere tale velocità per stabilire il record?

(A) 60 km/h **(B)** 120 km/h **(C)** 150 km/h **(D)** 170 km/h **(E)** Non è possibile.

- Prima idea: $48 = 2 \cdot 24$, quindi la velocità media della prima parte è 30 km/h.
- Allora imposto $\frac{30 + x}{2} = 100$ e ho la velocità cercata: 170 km/h.

Problema. (Archimede 2008) Un pilota vuole stabilire un nuovo record su un percorso di 50 km: percorrerlo alla velocità media di 100 km/h. A causa di alcuni problemi tecnici, tuttavia, impiega 48 minuti per percorrere i primi 24 km. Supponendo che proceda poi a velocità costante per il resto del percorso, quale deve essere tale velocità per stabilire il record?

(A) 60 km/h **(B)** 120 km/h **(C)** 150 km/h **(D)** 170 km/h **(E)** Non è possibile.

- Prima idea: $48 = 2 \cdot 24$, quindi la velocità media della prima parte è 30 km/h.
- Allora imposto $\frac{30+x}{2} = 100$ e ho la velocità cercata: 170 km/h.
- NO!

Problema. (Archimede 2008) Un pilota vuole stabilire un nuovo record su un percorso di 50 km: percorrerlo alla velocità media di 100 km/h. A causa di alcuni problemi tecnici, tuttavia, impiega 48 minuti per percorrere i primi 24 km. Supponendo che proceda poi a velocità costante per il resto del percorso, quale deve essere tale velocità per stabilire il record?

(A) 60 km/h **(B)** 120 km/h **(C)** 150 km/h **(D)** 170 km/h **(E)** Non è possibile.

- Prima idea: $48 = 2 \cdot 24$, quindi la velocità media della prima parte è 30 km/h.
- Allora imposto $\frac{30 + x}{2} = 100$ e ho la velocità cercata: 170 km/h.
- NO!
- Osservazione furba: per fare il percorso alla media voluta servono 30'. Se ne ha spesi già 48 non ce la potrà mai fare.

- Iniziare a risolvere il problema prima di averlo letto a fondo e capito.

- Iniziare a risolvere il problema prima di averlo letto a fondo e capito.
- Eccessivo riferimento ai “prototipi”.

- Iniziare a risolvere il problema prima di averlo letto a fondo e capito.
- Eccessivo riferimento ai “prototipi”.
- Lacune nell’astrazione e nell’analisi dei testi.

Falle principali

- Iniziare a risolvere il problema prima di averlo letto a fondo e capito.
- Eccessivo riferimento ai “prototipi”.
- Lacune nell’astrazione e nell’analisi dei testi.
- Difficoltà nella stesura scritta di una dimostrazione.

- Iniziare a risolvere il problema prima di averlo letto a fondo e capito.
- Eccessivo riferimento ai “prototipi”.
- Lacune nell’astrazione e nell’analisi dei testi.
- Difficoltà nella stesura scritta di una dimostrazione.

Problema. Ad una festa partecipano n persone. Ciascuno stringe la mano a tutti gli altri partecipanti che conosce. Dimostrare che ci sono (almeno) due persone che hanno stretto lo stesso numero di mani.

- Iniziare a risolvere il problema prima di averlo letto a fondo e capito.
- Eccessivo riferimento ai "prototipi".
- Lacune nell'astrazione e nell'analisi dei testi.
- Difficoltà nella stesura scritta di una dimostrazione.

  Problema. Ad una festa partecipano n persone. Ciascuno stringe la mano a tutti gli altri partecipanti che conosce. Dimostrare che ci sono (almeno) due persone che hanno stretto lo stesso numero di mani.

- Reticenza a sperimentare, sporcarsi le mani, ricondursi a problemi simili.

- Iniziare a risolvere il problema prima di averlo letto a fondo e capito.
- Eccessivo riferimento ai “prototipi”.
- Lacune nell’astrazione e nell’analisi dei testi.
- Difficoltà nella stesura scritta di una dimostrazione.

  Problema. Ad una festa partecipano n persone. Ciascuno stringe la mano a tutti gli altri partecipanti che conosce. Dimostrare che ci sono (almeno) due persone che hanno stretto lo stesso numero di mani.

- Reticenza a sperimentare, sporcarsi le mani, ricondursi a problemi simili.
- Problemi con “se e solo se”.

- Iniziare a risolvere il problema prima di averlo letto a fondo e capito.
- Eccessivo riferimento ai “prototipi”.
- Lacune nell’astrazione e nell’analisi dei testi.
- Difficoltà nella stesura scritta di una dimostrazione.

  Problema. Ad una festa partecipano n persone. Ciascuno stringe la mano a tutti gli altri partecipanti che conosce. Dimostrare che ci sono (almeno) due persone che hanno stretto lo stesso numero di mani.

- Reticenza a sperimentare, sporcarsi le mani, ricondursi a problemi simili.
- Problemi con “se e solo se”.
- Difficoltà nel cogliere ed usare metainformazioni.

Problema. Due amici si incontrano dopo molti anni. "Hai famiglia?" "Sì, ho tre figlie." "Quanti anni hanno?" "Il prodotto dei loro anni è 36, mentre la somma è uguale a quel numero civico là." "Mmmh, non mi bastano questi dati." "La maggiore ha gli occhi azzurri, come mia moglie." "Ora so quanti anni hanno!"

Problema. Due amici si incontrano dopo molti anni. “Hai famiglia?” “Sì, ho tre figlie.” “Quanti anni hanno?” “Il prodotto dei loro anni è 36, mentre la somma è uguale a quel numero civico là.” “Mmmh, non mi bastano questi dati.” “La maggiore ha gli occhi azzurri, come mia moglie.” “Ora so quanti anni hanno!”

- La prima cosa che colpisce solitamente è che pare mancare il dato sulla somma.

Problema. Due amici si incontrano dopo molti anni. “Hai famiglia?” “Sì, ho tre figlie.” “Quanti anni hanno?” “Il prodotto dei loro anni è 36, mentre la somma è uguale a quel numero civico là.” “Mmmh, non mi bastano questi dati.” “La maggiore ha gli occhi azzurri, come mia moglie.” “Ora so quanti anni hanno!”

- La prima cosa che colpisce solitamente è che pare mancare il dato sulla somma.
- Il dato sul colore degli occhi pare essere completamente irrilevante, ma...

Problema. (Febbraio 2014) Una griglia con m righe ed n colonne ha ogni casella colorata in bianco o in nero in modo da rispettare le seguenti due condizioni:

1. ogni riga contiene tante caselle bianche quante nere;
2. se una riga incontra una colonna in una casella nera, allora quella riga e quella colonna hanno lo stesso numero di caselle nere; allo stesso modo, se una riga interseca una colonna in una casella bianca, allora quella riga e quella colonna hanno lo stesso numero di caselle bianche.

Trovare tutte le possibili coppie (m, n) per cui può esistere una siffatta colorazione.

Problema. (Febbraio 2014) Una griglia con m righe ed n colonne ha ogni casella colorata in bianco o in nero in modo da rispettare le seguenti due condizioni:

1. ogni riga contiene tante caselle bianche quante nere;
2. se una riga incontra una colonna in una casella nera, allora quella riga e quella colonna hanno lo stesso numero di caselle nere; allo stesso modo, se una riga interseca una colonna in una casella bianca, allora quella riga e quella colonna hanno lo stesso numero di caselle bianche.

Trovare tutte le possibili coppie (m, n) per cui può esistere una siffatta colorazione.

Tanti mostrano che **se** esiste deve essere della forma $(a, 2a)$ o $(2a, 2a)$. Pochissimi mostrano soluzioni esplicite nei due casi.

Problema. (Febbraio 2014) Una griglia con m righe ed n colonne ha ogni casella colorata in bianco o in nero in modo da rispettare le seguenti due condizioni:

1. ogni riga contiene tante caselle bianche quante nere;
2. se una riga incontra una colonna in una casella nera, allora quella riga e quella colonna hanno lo stesso numero di caselle nere; allo stesso modo, se una riga interseca una colonna in una casella bianca, allora quella riga e quella colonna hanno lo stesso numero di caselle bianche.

Trovare tutte le possibili coppie (m, n) per cui può esistere una siffatta colorazione.

Tanti mostrano che **se** esiste deve essere della forma $(a, 2a)$ o $(2a, 2a)$. Pochissimi mostrano soluzioni esplicite nei due casi.

Similmente per $\inf$ che dovrebbero essere $\min$.

Problema. Alberto e Bernardo sono recentemente diventati amici di Cirilla e vogliono scoprire quando sia il suo compleanno. Cirilla dà loro un elenco di 10 possibili date:

15 maggio	16 maggio	19 maggio
17 giugno	18 giugno	
14 luglio	16 luglio	
14 agosto	15 agosto	17 agosto

A questo punto dice separatamente ad Alberto il mese e a Bernardo il giorno della sua nascita. I due amici dichiarano:

Alberto. "Io non so quando sia il compleanno di Cirilla, ma sono sicuro che nemmeno Bernardo lo sappia."

Bernardo. "È vero, all'inizio non sapevo il compleanno di Cirilla, ma ora lo so."

Alberto. "Allora lo so anche io."

Problema. Alberto e Bernardo sono recentemente diventati amici di Cirilla e vogliono scoprire quando sia il suo compleanno. Cirilla dà loro un elenco di 10 possibili date:

15 maggio	16 maggio	19 maggio
17 giugno	18 giugno	
14 luglio	16 luglio	
14 agosto	15 agosto	17 agosto

A questo punto dice separatamente ad Alberto il mese e a Bernardo il giorno della sua nascita. I due amici dichiarano:

Alberto. “Io non so quando sia il compleanno di Cirilla, ma sono sicuro che nemmeno Bernardo lo sappia.”

Bernardo. “È vero, all’inizio non sapevo il compleanno di Cirilla, ma ora lo so.”

Alberto. “Allora lo so anche io.”

- A1: Alberto ha sentito luglio o agosto

Problema. Alberto e Bernardo sono recentemente diventati amici di Cirilla e vogliono scoprire quando sia il suo compleanno. Cirilla dà loro un elenco di 10 possibili date:

15 maggio	16 maggio	19 maggio
17 giugno	18 giugno	
14 luglio	16 luglio	
14 agosto	15 agosto	17 agosto

A questo punto dice separatamente ad Alberto il mese e a Bernardo il giorno della sua nascita. I due amici dichiarano:

Alberto. "Io non so quando sia il compleanno di Cirilla, ma sono sicuro che nemmeno Bernardo lo sappia."

Bernardo. "È vero, all'inizio non sapevo il compleanno di Cirilla, ma ora lo so."

Alberto. "Allora lo so anche io."

- A1: Alberto ha sentito luglio o agosto
- B1: Bernardo non ha sentito 14

Problema. Alberto e Bernardo sono recentemente diventati amici di Cirilla e vogliono scoprire quando sia il suo compleanno. Cirilla dà loro un elenco di 10 possibili date:

15 maggio	16 maggio	19 maggio
17 giugno	18 giugno	
14 luglio	16 luglio	
14 agosto	15 agosto	17 agosto

A questo punto dice separatamente ad Alberto il mese e a Bernardo il giorno della sua nascita. I due amici dichiarano:

Alberto. "Io non so quando sia il compleanno di Cirilla, ma sono sicuro che nemmeno Bernardo lo sappia."

Bernardo. "È vero, all'inizio non sapevo il compleanno di Cirilla, ma ora lo so."

Alberto. "Allora lo so anche io."

- A1: Alberto ha sentito luglio o agosto
- B1: Bernardo non ha sentito 14
- A questo punto c'è lo stupore che Alberto abbia risolto, non la domanda sul come.
- A2: Alberto ha sentito luglio.

- Non è un tipico problema olimpico: troppo subdolo per essere facile, troppo facile per essere difficile.

- Non è un tipico problema olimpico: troppo subdolo per essere facile, troppo facile per essere difficile.
- Quasi tutti i partecipanti seri alle gare provinciali dovrebbero risolverlo (o esserne incuriositi abbastanza).

È un problema olimpico?

- Non è un tipico problema olimpico: troppo subdolo per essere facile, troppo facile per essere difficile.
- Quasi tutti i partecipanti seri alle gare provinciali dovrebbero risolverlo (o esserne incuriositi abbastanza).
- È un bel rompicapo.

È un problema olimpico?

- Non è un tipico problema olimpico: troppo subdolo per essere facile, troppo facile per essere difficile.
- Quasi tutti i partecipanti seri alle gare provinciali dovrebbero risolverlo (o esserne incuriositi abbastanza).
- È un bel rompicapo.
- Mostra il valore del "sapere che qualcuno sa", oltre a quello dell'informazione stessa.

È un problema olimpico?

- Non è un tipico problema olimpico: troppo subdolo per essere facile, troppo facile per essere difficile.
- Quasi tutti i partecipanti seri alle gare provinciali dovrebbero risolverlo (o esserne incuriositi abbastanza).
- È un bel rompicapo.
- Mostra il valore del "sapere che qualcuno sa", oltre a quello dell'informazione stessa.
- Problema di Monty Hall.

Problema. (Febbraio 2014) Un cavallo è posto in una casella d'angolo di una scacchiera 3×3. Una mossa consiste nello spostare il cavallo in una casella raggiungibile mediante due passi in orizzontale seguiti da uno in verticale, o due passi in verticale seguiti da uno in orizzontale. In quanti modi è possibile spostarlo nella casella d'angolo opposta, con esattamente 12 mosse?

$*$		

Problema. (Febbraio 2014) Un cavallo è posto in una casella d'angolo di una scacchiera 3×3. Una mossa consiste nello spostare il cavallo in una casella raggiungibile mediante due passi in orizzontale seguiti da uno in verticale, o due passi in verticale seguiti da uno in orizzontale. In quanti modi è possibile spostarlo nella casella d'angolo opposta, con esattamente 12 mosse?

$*$		

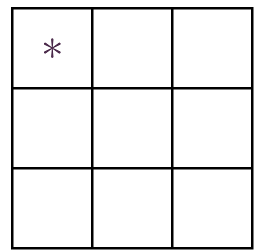
- Il cavallo si muove sul perimetro, di 3 in senso orario/anti.

Problema. (Febbraio 2014) Un cavallo è posto in una casella d'angolo di una scacchiera 3×3. Una mossa consiste nello spostare il cavallo in una casella raggiungibile mediante due passi in orizzontale seguiti da uno in verticale, o due passi in verticale seguiti da uno in orizzontale. In quanti modi è possibile spostarlo nella casella d'angolo opposta, con esattamente 12 mosse?

$*$		

- Il cavallo si muove sul perimetro, di 3 in senso orario/anti.
- Per arrivare al vertice opposto ha bisogno di 4 mosse in una direzione.

Problema. (Febbraio 2014) Un cavallo è posto in una casella d'angolo di una scacchiera 3×3. Una mossa consiste nello spostare il cavallo in una casella raggiungibile mediante due passi in orizzontale seguiti da uno in verticale, o due passi in verticale seguiti da uno in orizzontale. In quanti modi è possibile spostarlo nella casella d'angolo opposta, con esattamente 12 mosse?



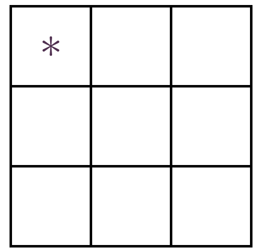
- Il cavallo si muove sul perimetro, di 3 in senso orario/anti.
- Per arrivare al vertice opposto ha bisogno di 4 mosse in una direzione.
- Dobbiamo risolvere $x + y = 12, x - y = 8\,k + 4$, $x = 12$, $y = 0$; $x = 8$, $y = 4$.

Problema. (Febbraio 2014) Un cavallo è posto in una casella d'angolo di una scacchiera 3×3. Una mossa consiste nello spostare il cavallo in una casella raggiungibile mediante due passi in orizzontale seguiti da uno in verticale, o due passi in verticale seguiti da uno in orizzontale. In quanti modi è possibile spostarlo nella casella d'angolo opposta, con esattamente 12 mosse?

$*$		

- Il cavallo si muove sul perimetro, di 3 in senso orario/anti.
- Per arrivare al vertice opposto ha bisogno di 4 mosse in una direzione.
- Dobbiamo risolvere $x + y = 12, x - y = 8\,k + 4$, $x = 12$, $y = 0; x = 8$, $y = 4$.
- Dobbiamo contare "dove" sono le mosse in senso inverso.

Problema. (Febbraio 2014) Un cavallo è posto in una casella d'angolo di una scacchiera 3×3. Una mossa consiste nello spostare il cavallo in una casella raggiungibile mediante due passi in orizzontale seguiti da uno in verticale, o due passi in verticale seguiti da uno in orizzontale. In quanti modi è possibile spostarlo nella casella d'angolo opposta, con esattamente 12 mosse?



- Il cavallo si muove sul perimetro, di 3 in senso orario/anti.
- Per arrivare al vertice opposto ha bisogno di 4 mosse in una direzione.
- Dobbiamo risolvere $x + y = 12, x - y = 8\,k + 4$, $x = 12$, $y = 0$; $x = 8$, $y = 4$.
- Dobbiamo contare "dove" sono le mosse in senso inverso.
- In totale: $2 \cdot \left(1 + \binom{12}{4}\right) = 992$.

Problema. (Febbraio 2014) Un cavallo è posto in una casella d'angolo di una scacchiera 3×3. Una mossa consiste nello spostare il cavallo in una casella raggiungibile mediante due passi in orizzontale seguiti da uno in verticale, o due passi in verticale seguiti da uno in orizzontale. In quanti modi è possibile spostarlo nella casella d'angolo opposta, con esattamente 12 mosse?

$*$		

- Il cavallo si muove sul perimetro, di 3 in senso orario/anti.
- Per arrivare al vertice opposto ha bisogno di 4 mosse in una direzione.
- Dobbiamo risolvere $x + y = 12, x - y = 8\,k + 4$, $x = 12, y = 0; x = 8, y = 4$.
- Dobbiamo contare "dove" sono le mosse in senso inverso.
- In totale: $2 \cdot \left(1 + \binom{12}{4}\right) = 992$.
- Abbastanza facile, ma occorrono strumenti in più.

- Come funziona uno stage olimpico?

- Come funziona uno stage olimpico?
- Vantaggio del pubblico.

- Come funziona uno stage olimpico?
- Vantaggio del pubblico.
- Poca teoria, tanti problemi.

- Come funziona uno stage olimpico?
- Vantaggio del pubblico.
- Poca teoria, tanti problemi.
- Linguaggio “con le mani in pasta”.

- Come funziona uno stage olimpico?
- Vantaggio del pubblico.
- Poca teoria, tanti problemi.
- Linguaggio “con le mani in pasta”.
- Insistere sulla scrittura.

- Come funziona uno stage olimpico?
- Vantaggio del pubblico.
- Poca teoria, tanti problemi.
- Linguaggio "con le mani in pasta".
- Insistere sulla scrittura.
- Insistere su critiche, variazioni, proposte alternative.

- Come funziona uno stage olimpico?
- Vantaggio del pubblico.
- Poca teoria, tanti problemi.
- Linguaggio "con le mani in pasta".
- Insistere sulla scrittura.
- Insistere su critiche, variazioni, proposte alternative.
- Problemi con approcci o visualizzazioni inusuali.

- Come funziona uno stage olimpico?
- Vantaggio del pubblico.
- Poca teoria, tanti problemi.
- Linguaggio “con le mani in pasta”.
- Insistere sulla scrittura.
- Insistere su critiche, variazioni, proposte alternative.
- Problemi con approcci o visualizzazioni inusuali.

Problema. Nella rosa di una squadra di rugby ci sono 40 giocatori, con le maglie numerate da 1 a 40. In quanti modi posso scegliere una squadra da 15 se non voglio giocatori con numeri di maglietta consecutivi?

- Come funziona uno stage olimpico?
- Vantaggio del pubblico.
- Poca teoria, tanti problemi.
- Linguaggio "con le mani in pasta".
- Insistere sulla scrittura.
- Insistere su critiche, variazioni, proposte alternative.
- Problemi con approcci o visualizzazioni inusuali.

> **Problema.** Nella rosa di una squadra di rugby ci sono 40 giocatori, con le maglie numerate da 1 a 40. In quanti modi posso scegliere una squadra da 15 se non voglio giocatori con numeri di maglietta consecutivi?

- So come sceglierli "normalmente", come posso garantire la condizione?

- Come funziona uno stage olimpico?
- Vantaggio del pubblico.
- Poca teoria, tanti problemi.
- Linguaggio "con le mani in pasta".
- Insistere sulla scrittura.
- Insistere su critiche, variazioni, proposte alternative.
- Problemi con approcci o visualizzazioni inusuali.

> **Problema.** Nella rosa di una squadra di rugby ci sono 40 giocatori, con le maglie numerate da 1 a 40. In quanti modi posso scegliere una squadra da 15 se non voglio giocatori con numeri di maglietta consecutivi?

- So come sceglierli "normalmente", come posso garantire la condizione?
- $+0, +1, \ldots, +14$, devo avere $n+14=40$, quindi $\binom{26}{15}$.

- Cosa lasciano le Olimpiadi?

- Cosa lasciano le Olimpiadi?
- Contenuti? Tecniche? Euristiche?

- Cosa lasciano le Olimpiadi?
- Contenuti? Tecniche? Euristiche?

Problema. (Archimede 2012) In una classe gli alunni biondi sono il 40% del totale, mentre i restanti sono castani. Tra i biondi, il 75% sono femmine. Sapendo che nella classe il numero di femmine è uguale al numero di maschi, qual è la percentuale di maschi castani sul totale degli alunni della classe?

- Cosa lasciano le Olimpiadi?
- Contenuti? Tecniche? Euristiche?

Problema. (Archimede 2012) In una classe gli alunni biondi sono il 40% del totale, mentre i restanti sono castani. Tra i biondi, il 75% sono femmine. Sapendo che nella classe il numero di femmine è uguale al numero di maschi, qual è la percentuale di maschi castani sul totale degli alunni della classe?

- Percentuali e probabilità di base, forse.

- Cosa lasciano le Olimpiadi?
- Contenuti? Tecniche? Euristiche?

Problema. (Archimede 2012) In una classe gli alunni biondi sono il 40% del totale, mentre i restanti sono castani. Tra i biondi, il 75% sono femmine. Sapendo che nella classe il numero di femmine è uguale al numero di maschi, qual è la percentuale di maschi castani sul totale degli alunni della classe?

- Percentuali e probabilità di base, forse.
- Capacità di risolvere problemi.

- Cosa lasciano le Olimpiadi?
- Contenuti? Tecniche? Euristiche?

  Problema. (Archimede 2012) In una classe gli alunni biondi sono il 40% del totale, mentre i restanti sono castani. Tra i biondi, il 75% sono femmine. Sapendo che nella classe il numero di femmine è uguale al numero di maschi, qual è la percentuale di maschi castani sul totale degli alunni della classe?

- Percentuali e probabilità di base, forse.
- Capacità di risolvere problemi.
- Capacità di produrre e valutare un'argomentazione valida (e.g. esercizi "per casa").

- Cosa lasciano le Olimpiadi?
- Contenuti? Tecniche? Euristiche?

Problema. (Archimede 2012) In una classe gli alunni biondi sono il 40% del totale, mentre i restanti sono castani. Tra i biondi, il 75% sono femmine. Sapendo che nella classe il numero di femmine è uguale al numero di maschi, qual è la percentuale di maschi castani sul totale degli alunni della classe?

- Percentuali e probabilità di base, forse.
- Capacità di risolvere problemi.
- Capacità di produrre e valutare un'argomentazione valida (e.g. esercizi "per casa").
- Onestà intellettuale, riconoscimento degli errori, pretesa di risposte "valide".

- Scope insensitivity.
- Confirmation bias (or positive).
- Conjunction fallacy.
- Planning fallacy.
- Priming.
- Illusion of transparency.
- Evaluability.
- ...

Definizione. (Razionalità) *Massimizzare l'aderenza delle proprie credenze alla realtà ed agire in modo da massimizzare la probabilità di successo nel conseguire i propri obiettivi.*

Definizione. (Razionalità) *Massimizzare l'aderenza delle proprie credenze alla realtà ed agire in modo da massimizzare la probabilità di successo nel conseguire i propri obiettivi.*

In realtà abbiamo **due** razionalità, strumentale ed epistemica. La prima uguale per tutti, la seconda non necessariamente.

Definizione. (Razionalità) *Massimizzare l'aderenza delle proprie credenze alla realtà ed agire in modo da massimizzare la probabilità di successo nel conseguire i propri obiettivi.*

In realtà abbiamo **due** razionalità, strumentale ed epistemica. La prima uguale per tutti, la seconda non necessariamente.

Saper aggiornare davvero le proprie convinzioni. Imparare dai controesempi.

Definizione. (Razionalità) *Massimizzare l'aderenza delle proprie credenze alla realtà ed agire in modo da massimizzare la probabilità di successo nel conseguire i propri obiettivi.*

In realtà abbiamo **due** razionalità, strumentale ed epistemica. La prima uguale per tutti, la seconda non necessariamente.

Saper aggiornare davvero le proprie convinzioni. Imparare dai controesempi.

Esempio. Il conduttore del gioco dichiara di avere stabilito una proprietà, soddisfatta da alcune terne di numeri interi positivi. Dice che la terna $(3, 6, 9)$ soddisfa tale proprietà ed invita i partecipanti a proporre esempi di terne, delle quali dirà se soddisfano o meno la proprietà e, quando sono convinti di avere individuato la regola, a dichiararla.

Definizione. (Razionalità) *Massimizzare l'aderenza delle proprie credenze alla realtà ed agire in modo da massimizzare la probabilità di successo nel conseguire i propri obiettivi.*

In realtà abbiamo **due** razionalità, strumentale ed epistemica. La prima uguale per tutti, la seconda non necessariamente.

Saper aggiornare davvero le proprie convinzioni. Imparare dai controesempi.

Esempio. Il conduttore del gioco dichiara di avere stabilito una proprietà, soddisfatta da alcune terne di numeri interi positivi. Dice che la terna $(3, 6, 9)$ soddisfa tale proprietà ed invita i partecipanti a proporre esempi di terne, delle quali dirà se soddisfano o meno la proprietà e, quando sono convinti di avere individuato la regola, a dichiararla.

La maggior parte dei partecipanti dichiara una regola **prima** di aver proposto controesempi, ma solamente esempi a supporto della regola medesima.

Si tratta di un contenuto di base della probabilità: potrebbe essere presentato in uno stage di livello medio.

Enunciato standard:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\cdot P(A)}{P(B)}, \qquad P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Nella pratica può essere interessante valutare gli "odds". In tal caso

$$\frac{P(A_1|B)}{P(A_2|B)} = \frac{P(B|A_1)}{P(B|A_2)}\cdot\frac{P(A_1)}{P(A_2)}$$

in cui il termine centrale è la likelihood ratio.

Per fare rapidamente conti e stime possiamo fare un passo in più:

$$\log\left(\frac{P(A_1|B)}{P(A_2|B)}\right) = \log\left(\frac{P(B|A_1)}{P(B|A_2)}\right) + \log\left(\frac{P(A_1)}{P(A_2)}\right)$$

Incidenza HIV in Italia: $6.1\,/\,100.000$.

Falsi positivi (specificity): $15\,/\,1000$.

Falsi negativi (sensitivity): $3\,/\,1000$.

Prior

$$\log\left(\frac{P(\text{malato})}{P(\text{non malato})}\right) = \log\left(\frac{61}{9999939}\right) \approx -5.21$$

Likelihood

$$\log\left(\frac{P(\text{positivo}|\text{malato})}{P(\text{positivo}|\text{non malato})}\right) = \log\left(\frac{997}{15}\right) \approx 1.82$$

Posterior

$$\log\left(\frac{P(\text{malato}|\text{positivo})}{P(\text{non malato}|\text{positivo})}\right) \approx -5.21 + 1.82 = -3.39$$

Cioè odds di $4\!:10000$.

Presentazione preparata in
TeXmacs