

Pene d'amor perdute: insegnare logica

Gabriele Lolli

“Educare alla razionalità. In ricordo di Paolo Gentilini”, Sestri Levante, 9 giugno 2016

The great Failure

The great Failure

Se gli allievi non capiscono, il torto è dell'insegnante che non sa spiegare. Né vale addossare la responsabilità alle scuole inferiori.

(Peano, 1925)

The great Failure

Se gli allievi non capiscono, il torto è dell'insegnante che non sa spiegare. Né vale addossare la responsabilità alle scuole inferiori.

Dobbiamo prendere gli allievi come sono, e richiamare ciò che essi hanno dimenticato, o studiato sotto altra nomenclatura.

(Peano, 1925)

Florilegio da prove di Logica matematica

Florilegio da prove di Logica matematica

Prova del 1 dicembre 2001

Domanda:

3. I cigni sono bianchi. Ho visto un'anatra nera. Allora non tutte le anatre sono cigni.

a) Formalizzare l'argomento. È corretto? Come lo si può dimostrare?

b) Segue logicamente dalle due premesse che tutte le anatre non sono cigni? Perché?

Risposte a 3

- “ $A(x) = \text{animali}$

$C(x) = \text{colore}$

$x = \text{cigni}$

$y = \text{anatre}$

$\forall x(C(x))$

$\exists y(\neg(C(y)))$

$\forall x(A(x, y) \wedge (x) \wedge \exists y(A(x, y) \wedge \neg C(y)) \rightarrow \neg \forall x(x \neq y))$.

Risposte a 3

- “ $A(x) = \text{animali}$

$C(x) = \text{colore}$

$x = \text{cigni}$

$y = \text{anatre}$

$\forall x(C(x))$

$\exists y(\neg(C(y)))$

$\forall x(A(x, y) \wedge (x) \wedge \exists y(A(x, y) \wedge \neg C(y)) \rightarrow \neg \forall x(x \neq y))$.

- “Allora non tutte le anatre sono cigni, si può anche esprimere come esiste qualche anatra che è un cigno”.

Risposte a 3

- “ $A(x)$ = animali

$C(x)$ = colore

x = cigni

y = anatre

$\forall x(C(x))$

$\exists y(\neg(C(y)))$

$\forall x(A(x, y) \wedge (x) \wedge \exists y(A(x, y) \wedge \neg C(y)) \rightarrow \neg \forall x(x \neq y))$.

- “Allora non tutte le anatre sono cigni, si può anche esprimere come esiste qualche anatra che è un cigno” .

- “ $C(x)$ x è un cigno bianco

$A(x)$ x è un'anatra nera

$(\forall x(C(x)) \wedge \exists x(A(x))) \rightarrow \neg \forall x(A(x) \wedge C(x))$ ” .

Prova del 14 dicembre 2001

Domande:

2. Tutti i cigni sono bianchi. Nessun corvo è bianco. Segue logicamente da queste premesse che nessun corvo è un cigno? Perché?

3. Tutti i cigni sono bianchi. Nessun'anatra è un cigno. Segue logicamente da queste premesse che nessun'anatra è bianca? Perché?

Prova del 14 dicembre 2001

Domande:

2. Tutti i cigni sono bianchi. Nessun corvo è bianco. Segue logicamente da queste premesse che nessun corvo è un cigno? Perché?

3. Tutti i cigni sono bianchi. Nessun'anatra è un cigno. Segue logicamente da queste premesse che nessun'anatra è bianca? Perché?

Risposte a 2 e 3

- “La frase ‘Nessun corvo è bianco’ può essere vista anche come ‘esiste un corvo che non è bianco’ ”.

Prova del 14 dicembre 2001

Domande:

2. Tutti i cigni sono bianchi. Nessun corvo è bianco. Segue logicamente da queste premesse che nessun corvo è un cigno? Perché?

3. Tutti i cigni sono bianchi. Nessun'anatra è un cigno. Segue logicamente da queste premesse che nessun'anatra è bianca? Perché?

Risposte a 2 e 3

- “La frase ‘Nessun corvo è bianco’ può essere vista anche come ‘esiste un corvo che non è bianco’ ”.
- “Se assumiamo solo la caratteristica del colore, le anatre, non essendo cigni bianchi, non sono bianche”.

Prova del 14 dicembre 2001

Domande:

2. Tutti i cigni sono bianchi. Nessun corvo è bianco. Segue logicamente da queste premesse che nessun corvo è un cigno? Perché?

3. Tutti i cigni sono bianchi. Nessun'anatra è un cigno. Segue logicamente da queste premesse che nessun'anatra è bianca? Perché?

Risposte a 2 e 3

- “La frase ‘Nessun corvo è bianco’ può essere vista anche come ‘esiste un corvo che non è bianco’ ”.
- “Se assumiamo solo la caratteristica del colore, le anatre, non essendo cigni bianchi, non sono bianche”.
- “La conclusione non segue dalle premesse in quanto una delle premesse coincide con la stessa conclusione”.

Prova del 3 novembre 2004

Domande:

1. Per conquistare la principessa, Aladino deve scegliere di aprire una di due scatole A e B; sa che in una c'è un anello di fidanzamento, nell'altra un serpente velenoso. Sulla scatola A è scritto: "Almeno una di queste scatole contiene un anello"; sulla scatola B è scritto: "Nella scatola A c'è un serpente velenoso che uccide all'istante". Ad Aladino viene detto che o entrambe le scritte sono vere, o entrambe false. Quale scatola apre?

Prova del 3 novembre 2004

Domande:

1. Per conquistare la principessa, Aladino deve scegliere di aprire una di due scatole A e B; sa che in una c'è un anello di fidanzamento, nell'altra un serpente velenoso. Sulla scatola A è scritto: "Almeno una di queste scatole contiene un anello"; sulla scatola B è scritto: "Nella scatola A c'è un serpente velenoso che uccide all'istante". Ad Aladino viene detto che o entrambe le scritte sono vere, o entrambe false. Quale scatola apre?

Risposte a 1

- "Siccome B dice il contrario di A, allora A e B non possono essere tutte e due false quindi sono tutte e due vere".

- Aladino: “Per intuizione possiamo dedurre che la scritta su A è vera, e di conseguenza ...”.

- Aladino: “Per intuizione possiamo dedurre che la scritta su A è vera, e di conseguenza ...”.
- “Se A è vero anche B è vero perché se una proposizione inizia con una verità e finisce con una verità allora la proposizione è vera.

Se invece la proposizione inizia con una frase falsa e finisce con una frase falsa allora la proposizione è falsa”.

- Aladino: “Per intuizione possiamo dedurre che la scritta su A è vera, e di conseguenza ...”.
- “Se A è vero anche B è vero perché se una proposizione inizia con una verità e finisce con una verità allora la proposizione è vera.

Se invece la proposizione inizia con una frase falsa e finisce con una frase falsa allora la proposizione è falsa”.

Varie

1. Per scrivere “nessuno se la cava sempre”, con il suggerimento di usare $R(x, t)$ per “ x se la cava nell’occasione t ”, il meglio (nel senso che almeno è una formula) è

$$\neg \forall x \forall t R(x, t).$$

2. Formalizzare “Su due persone, una è stupida”:

- $\forall y \exists x (x = y/2 \rightarrow S(x))$

- $\forall x \{2x \rightarrow \exists x | S(x)\}$

2. Formalizzare “Su due persone, una è stupida”:

- $\forall y \exists x (x = y/2 \rightarrow S(x))$
- $\forall x \{2x \rightarrow \exists x | S(x)\}$

3. Formalizzare “Il successore di un primo maggiore di 2 non è primo”:

2. Formalizzare “Su due persone, una è stupida”:

- $\forall y \exists x (x = y/2 \rightarrow S(x))$
- $\forall x \{2x \rightarrow \exists x | S(x)\}$

3. Formalizzare “Il successore di un primo maggiore di 2 non è primo”:

- Sia 0 un numero generico

Sia 0' il suo successore

$$\neg(0 < 2) \wedge pr(0) \rightarrow \neg pr(0')$$

2. Formalizzare “Su due persone, una è stupida”:

- $\forall y \exists x (x = y/2 \rightarrow S(x))$
- $\forall x \{2x \rightarrow \exists x | S(x)\}$

3. Formalizzare “Il successore di un primo maggiore di 2 non è primo”:

- Sia 0 un numero generico

Sia 0' il suo successore

$$\neg(0 < 2) \wedge pr(0) \rightarrow \neg pr(0')$$

- $\exists x (0 < x \wedge pr(x) \rightarrow \forall y (x \cdot x' = y))$

2. Formalizzare “Su due persone, una è stupida”:

- $\forall y \exists x (x = y/2 \rightarrow S(x))$
- $\forall x \{2x \rightarrow \exists x | S(x)\}$

3. Formalizzare “Il successore di un primo maggiore di 2 non è primo”:

- Sia 0 un numero generico

Sia 0' il suo successore

$$\neg(0 < 2) \wedge pr(0) \rightarrow \neg pr(0')$$

- $\exists x (0 < x \wedge pr(x) \rightarrow \forall y (x \cdot x' = y))$
- $\forall x (pr(x) \wedge (x = x \cdot x) \wedge par(x) \rightarrow \exists y (y = x + 1) \wedge \neg \exists y (y | y))$

2. Formalizzare “Su due persone, una è stupida”:

- $\forall y \exists x (x = y/2 \rightarrow S(x))$
- $\forall x \{2x \rightarrow \exists x | S(x)\}$

3. Formalizzare “Il successore di un primo maggiore di 2 non è primo”:

- Sia 0 un numero generico

Sia 0' il suo successore

$$\neg(0 < 2) \wedge pr(0) \rightarrow \neg pr(0')$$

- $\exists x (0 < x \wedge pr(x) \rightarrow \forall y (x \cdot x' = y))$
- $\forall x (pr(x) \wedge (x = x \cdot x) \wedge par(x) \rightarrow \exists y (y = x + 1) \wedge \neg \exists y (y | y))$
- $\forall x \exists y (0 < x < y \rightarrow \neg y')$

“Esempi. Il lettore, per abituarsi ne’ segni introdotti può interpretare in linguaggio ordinario le seguenti proposizioni, in cui $a, b, \dots, x, y, \dots$ rappresentano numeri reali e finiti:

$$(a < b) = (b > a); \dots$$

$$(x + y = a) \cap (x - y = b) = (2x = a + b) \cap (2y = a - b); \dots$$

$$(x^2 - 3x + 2 > 0) = (x < 1) \cup (x > 2), \dots”.$$

(Peano, 1888)

“Esempi. Il lettore, per abituarsi ne’ segni introdotti può interpretare in linguaggio ordinario le seguenti proposizioni, in cui $a, b, \dots, x, y, \dots$ rappresentano numeri reali e finiti:

$$(a < b) = (b > a); \dots$$

$$(x + y = a) \cap (x - y = b) = (2x = a + b) \cap (2y = a - b); \dots$$

$$(x^2 - 3x + 2 > 0) = (x < 1) \cup (x > 2), \dots”.$$

(Peano, 1888)

ricostruzione razionale

Rudimenti del linguaggio matematico

Rudimenti del linguaggio matematico

La matematica è un linguaggio?

Rudimenti del linguaggio matematico

La matematica è un linguaggio?

Occorre rendersi conto del fatto che *tutto quello che di fatto abbiamo nella matematica sono dei discorsi, delle frasi che partono da alcune immagini mentali troppo soggettive e vaghe e fluttuanti per dar luogo a un'ontologia affidabile, oggettiva o almeno intersoggettiva. [...]*
[B]asta un attimo di riflessione per avvertire che concretamente tutto quello che abbiamo sono solo quei discorsi [...]

(Pagli 2014)

Quando pensiamo alla matematica ci vengono in mente pagine interminabili fitte di simboli e formule. [I] due milioni di pagine [prodotte ogni anno dai matematici], però, contengono più parole che simboli: le parole spiegano l'antefatto del problema, lo svolgimento delle dimostrazioni, il significato dei calcoli e il posto del tutto all'interno del sempre crescente edificio della matematica. Come osservò il grande Carl Friedrich Gauss attorno al 1800, l'essenza della matematica sono "le nozioni, non le notazioni". Idee, non simboli.

(Stewart 2013)

Quando pensiamo alla matematica ci vengono in mente pagine interminabili fitte di simboli e formule. [I] due milioni di pagine [prodotte ogni anno dai matematici], però, contengono più parole che simboli: le parole spiegano l'antefatto del problema, lo svolgimento delle dimostrazioni, il significato dei calcoli e il posto del tutto all'interno del sempre crescente edificio della matematica. Come osservò il grande Carl Friedrich Gauss attorno al 1800, l'essenza della matematica sono "le nozioni, non le notazioni". Idee, non simboli.

(Stewart 2013)

elementi di base di una lingua: nomi e verbi

Quando pensiamo alla matematica ci vengono in mente pagine interminabili fitte di simboli e formule. [I] due milioni di pagine [prodotte ogni anno dai matematici], però, contengono più parole che simboli: le parole spiegano l'antefatto del problema, lo svolgimento delle dimostrazioni, il significato dei calcoli e il posto del tutto all'interno del sempre crescente edificio della matematica. Come osservò il grande Carl Friedrich Gauss attorno al 1800, l'essenza della matematica sono "le nozioni, non le notazioni". Idee, non simboli.

(Stewart 2013)

elementi di base di una lingua: nomi e verbi

linguaggio oggetto

metalinguaggio

più +

minore <

più +

minore <

“omni progressu de Mathematica responde ad introductione de
signos ideographico vel symbolos” (Peano, 1908)

più +

minore <

“omni progressu de Mathematica responde ad introductione de
signos ideographico vel symbolos” (Peano, 1908)

vera funzione dei simboli

più +

minore <

“omni progressu de Mathematica responde ad introductione de
signos ideographico vel symbolos” (Peano, 1908)

vera funzione dei simboli

I segni hanno sempre lo stesso significato, mentrech  le
parole ne hanno parecchi. Per tradurre in simboli una
proposizione ordinaria, occorre analizzarla, vedere il signi-
ficato che vi hanno le varie parole, e rappresentare questi
significati coi simboli equivalenti; si errerebbe assai se si
sostituissero senz’altro i simboli $\varepsilon, \cap, \cup, \dots$ al posto delle
parole  , e, o,

(Peano 1891)

più +

minore <

“omni progressu de Mathematica responde ad introductione de
signos ideographico vel symbolos” (Peano, 1908)

vera funzione dei simboli

I segni hanno sempre lo stesso significato, mentrech  le
parole ne hanno parecchi. Per tradurre in simboli una
proposizione ordinaria, occorre analizzarla, vedere il signi-
ficato che vi hanno le varie parole, e rappresentare questi
significati coi simboli equivalenti; si errerebbe assai se si
sostituissero senz’altro i simboli $\varepsilon, \cap, \cup, \dots$ al posto delle
parole  , e, o,

(Peano 1891)

Tutti, bianchi o neri, hanno un’anima

Tutti, bianchi e neri hanno un’anima

“[C]ostituiscono una nuova classificazione delle idee”. (Peano 1915)

“[C]ostituiscono una nuova classificazione delle idee”. (Peano 1915)

“L’uso delle cifre [...] essenzialmente rende i calcoli aritmetici più facili”.
(Peano 1915)

“[C]ostituiscono una nuova classificazione delle idee”. (Peano 1915)

“L’uso delle cifre [...] essenzialmente rende i calcoli aritmetici più facili”.
(Peano 1915)

uso de symbolismo de logica es necessario; nam ideas
que occurre in isto libro, es plus abstracto que ideas de
lingua familiare; nullo vocabulo de lingua commune habe
sensu exacto de symbolos.

(Peano 1913)

“[C]ostituiscono una nuova classificazione delle idee”. (Peano 1915)

“L’uso delle cifre [...] essenzialmente rende i calcoli aritmetici più facili”.
(Peano 1915)

uso de symbolismo de logica es necessario; nam ideas
que occurre in isto libro, es plus abstracto que ideas de
lingua familiare; nullo vocabulo de lingua commune habe
sensu exacto de symbolos.

(Peano 1913)

come si acquisiscono i concetti

“[C]ostituiscono una nuova classificazione delle idee”. (Peano 1915)

“L’uso delle cifre [...] essenzialmente rende i calcoli aritmetici più facili”.
(Peano 1915)

uso de symbolismo de logica es necessario; nam ideas
que occurre in isto libro, es plus abstracto que ideas de
lingua familiare; nullo vocabulo de lingua commune habe
sensu exacto de symbolos.

(Peano 1913)

come si acquisiscono i concetti

“la somma di $_$ e $_$ è ...”

$$1 + 1 = 2, \ 2 < 3, \ 2 + 3 = 5, \ 2 + 3 < 7$$

$$1 + 1 = 2, \quad 2 < 3, \quad 2 + 3 = 5, \quad 2 + 3 < 7$$

produttività

$$1 + 1 = 2, 2 < 3, 2 + 3 = 5, 2 + 3 < 7$$

produttività

attraverso leggi (di manipolazioni finitarie)

$$1 + 1 = 2, 2 < 3, 2 + 3 = 5, 2 + 3 < 7$$

produttività

attraverso leggi (di manipolazioni finitarie)

“la somma è commutativa”

$$1 + 1 = 2, \ 2 < 3, \ 2 + 3 = 5, \ 2 + 3 < 7$$

produttività

attraverso leggi (di manipolazioni finitarie)

“la somma è commutativa”

$$\lambda u, v. (u + v)$$

$$\lambda u, v. (u + v)(x, y) = \lambda u, v. (u + v)(y, x)$$

$$1 + 1 = 2, 2 < 3, 2 + 3 = 5, 2 + 3 < 7$$

produttività

attraverso leggi (di manipolazioni finitarie)

“la somma è commutativa”

$$x + y = y + x$$

$$1 + 1 = 2, 2 < 3, 2 + 3 = 5, 2 + 3 < 7$$

produttività

attraverso leggi (di manipolazioni finitarie)

“la somma è commutativa”

$$x + y = y + x$$

David Hilbert: $x + y = y + x$ affermazione finitaria *generale*

direzione giusta: trasformare un'espressione metalinguistica in una linguistica,
un'affermazione metateorica in una teorica

direzione giusta: trasformare un'espressione metalinguistica in una linguistica,
un'affermazione metateorica in una teorica

definizioni, assiomi, regole

direzione giusta: trasformare un'espressione metalinguistica in una linguistica,
un'affermazione metateorica in una teorica

definizioni, assiomi, regole

$$Pr(x) \leftrightarrow x > 1 \wedge \forall z(z \mid x \rightarrow z = 1 \vee z = x)$$

“La matematica non è semplicemente un'altra lingua.
La matematica è un linguaggio più un ragionamento;
un linguaggio più la logica, è cioè uno strumento per ragionare”.

(Feynman, 1965)

Linguaggio e ragionamento

“La matematica non è semplicemente un'altra lingua.

La matematica è un linguaggio più un ragionamento;

un linguaggio più la logica, è cioè uno strumento per ragionare”.

(Feynman, 1965)

Linguaggio e ragionamento

“La matematica non è semplicemente un'altra lingua.

La matematica è un linguaggio più un ragionamento;

un linguaggio più la logica, è cioè uno strumento per ragionare”.

(Feynman, 1965)

Le complessità evidentemente enormi della natura, con tutte le sue strane leggi e regole, ognuna delle quali vi è stata attentamente spiegata, sono in realtà legate in maniera molto stretta. Tuttavia se non apprezzate la matematica non potrete capire, nella grande varietà dei fatti, che la logica vi permette di passare dall'uno all'altro.

[per mezzo della matematica] è possibile collegare un'affermazione ad un'altra.

Una [...] cosa molto strana e interessante nella relazione tra fisica e matematica è il fatto che con argomentazioni matematiche si può far vedere che è possibile cominciare da molti punti apparentemente diversi e tuttavia trovare la stessa cosa.

(Feynman, 1965)

[per mezzo della matematica] è possibile collegare un'affermazione ad un'altra.

Una [...] cosa molto strana e interessante nella relazione tra fisica e matematica è il fatto che con argomentazioni matematiche si può far vedere che è possibile cominciare da molti punti apparentemente diversi e tuttavia trovare la stessa cosa.

(Feynman, 1965)

Hilbert, "Metodo assiomatico", 1917

[per mezzo della matematica] è possibile collegare un'affermazione ad un'altra.

Una [...] cosa molto strana e interessante nella relazione tra fisica e matematica è il fatto che con argomentazioni matematiche si può far vedere che è possibile cominciare da molti punti apparentemente diversi e tuttavia trovare la stessa cosa. (Feynman, 1965)

Hilbert, "Metodo assiomatico", 1917

Per realizzare la trasposizione linguistica della relazione di conseguenza occorre ovviamente introdurre simboli logici, e soprattutto le variabili vincolate, che sono il principale *trait d'union* delle frasi composte.

Il travaso della logica dal metalinguaggio nel linguaggio aumenta
la dose di formalizzazione

Il travaso della logica dal metalinguaggio nel linguaggio aumenta
la dose di formalizzazione

$\wedge$,	$\vee$,	$\rightarrow$,	$\neg$,	$\forall$,	$\exists$
e,	o,	implica,	non,	tutti,	qualcuno

Il travaso della logica dal metalinguaggio nel linguaggio aumenta la dose di formalizzazione

$\wedge$,	$\vee$,	$\rightarrow$,	$\neg$,	$\forall$,	$\exists$
e,	o,	implica,	non,	tutti,	qualcuno

Il *calcolo logico* era già disponibile, anche se “[c]ertamente questo in origine fu creato sotto tutt’altri punti di vista ed è perciò che anche i segni del calcolo logico furono introdotti originariamente solo per la comunicazione”.

(Hilbert 1925)

Il travaso della logica dal metalinguaggio nel linguaggio aumenta
la dose di formalizzazione

$\wedge$,	$\vee$,	$\rightarrow$,	$\neg$,	$\forall$,	$\exists$
e,	o,	implica,	non,	tutti,	qualcuno

Il *calcolo logico* era già disponibile, anche se “[c]ertamente questo in origine fu creato sotto tutt’altri punti di vista ed è perciò che anche i segni del calcolo logico furono introdotti originariamente solo per la comunicazione”.

(Hilbert 1925)

i livelli linguistico e metalinguistico sono entrambi completi e speculari
padroneggiare la logica significa usare con la stessa naturalezza
la logica naturale e quella formale.

paradosso: il discorso matematico appare sulla carta un gioco formale,
si svolge tutto nel metalinguaggio che controlla le regole

paradosso: il discorso matematico appare sulla carta un gioco formale,
si svolge tutto nel metalinguaggio che controlla le regole

Illos que, per defectu de exercitio, judica que symbolismo
es ligamen, non es obligato ad adopta illo. Nos strue novo
instrumento, et non destrue instrumentos existente.

[. . .]

me puta lingua plus limpido et claro, si non habe elemen-
tos inutile [. . .]. Ratione secundario es suo intelligibilitate
immediato, superiore ad omni lingua naturale.

(Peano 1913)

questo gioco di formule si svolge secondo regole determinate, nelle quali si esprime la tecnica del nostro pensiero.

questo gioco di formule si svolge secondo regole determinate, nelle quali si esprime la tecnica del nostro pensiero.

[compito della metamatemática è] descrivere l'attività del nostro intelletto, redigere un protocollo delle regole secondo cui procede realmente il nostro pensiero. Il pensiero si svolge sempre parallelamente al parlare e allo scrivere, formando ed allineando proposizioni.

questo gioco di formule si svolge secondo regole determinate, nelle quali si esprime la tecnica del nostro pensiero.

[compito della metamatemática è] descrivere l'attività del nostro intelletto, redigere un protocollo delle regole secondo cui procede realmente il nostro pensiero. Il pensiero si svolge sempre parallelamente al parlare e allo scrivere, formando ed allineando proposizioni.

Questo gioco di formule permette di esprimere unitariamente tutto il contenuto concettuale della scienza matematica e di svilupparlo in maniera tale da rendere chiare le interconnessioni dei singoli teoremi e dei singoli risultati.

(Hilbert 1927)

