Logica e didattica
Tavola Rotonda

Maffini Achille
a.maffini@achillemaffini.it
Liceo Scientifico Ulivi - Parma

Sestri Levante, 10 giugno 2016

Alcune criticità

- La (non) presenza della logica nelle Indicazioni Nazionali
- La formazione universitaria.
- L'uso improprio del linguaggio logico: dal linguaggio alle abbreviazioni da sms
- I quantificatori e i quantificatori relativizzati: dal linguaggio naturale al linguaggio specifico
- La (fuorviante) relazione del rapporto tra linguaggio naturale e linguaggio formalizzato
  - Il rapporto implicazione/causa effetto; condizioni necessarie e condizioni sufficienti
  - Connettivi, quantificatori e articoli (determinativi vs indeterminativi) nella prassi didattica; la decodifica dei quantificatori
  - L'Esame di Stato e i problemi contestualizzati
  - I test universitari e la 'zona grigia' della preparazione specifica.

Gli strumenti degli insegnanti

- Le Indicazioni Nazionali
- I libri di testo
  - Capitolo di Insiemi e Logica (in genere) con molto semantica di logica proposizionale e (un po') di semantica di logica predicativa.
  - Scopo: introdurre i connettivi e i quantificatori con quali finalità?
    - Utilizzo in ambito insiemistico
    - Stenografiche
  - Per i quantificatori, la maggiore attenzione è dedicata al rapporto quantificatori-negazione (funzionale ad esempio al calcolo combinatorio e delle probabilità)
- Le criticità dei libri di testo come opportunità didattica

Potenzialità inespresse

- Strutture morfologiche del linguaggio
  - Termini (espressioni)
  - Formule (equazioni, disequazioni)
  - Controllo sul ‘senso’ delle scritture come prerequisito per la comprensione del ‘senso’ della frase matematica
- La logica predicativa e gli aspetti linguistici legati alla gestione dei connettivi
  - Calcolo combinatorio e probabilità
- L’equilibrio tra sintassi e semantica
  - Esempio: equazioni
- Il linguaggio e la formalizzazione non come limite, ma come potenzialità, alla stregua del linguaggio algebrico
  - Alcuni esempi:
    - La matematica come probelma sociale: deduzione e la valutazione come modalità per capire e gestire le informazioni
    - una dimostrazione di analisi,
    - la ‘forma’ come occasione didattica

Cosa insegnare o come insegnare?

- Struttura dei linguaggi formali
- Logica proposizionale e predicativa, anche sul piano sintattico (gestione di strutture di ragionamento)
- Funzioni di interpretazione e modelli.
- L'arte del definire
- Struttura di una dimostrazione e concetto di teorema (logico); riflessione sul concetto di dimostrazione.
- Importante un approccio 'logico' inteso come attenzione costante alle strutture linguistiche e alla gestione degli oggetti matematici.

Le Indicazioni Nazionali-Matematica

5. Area scientifica, matematica e tecnologica

- Comprendere il linguaggio formale specifico della matematica, saper utilizzare le procedure tipiche del pensiero matematico, conoscere i contenuti fondamentali delle teorie che sono alla base della descrizione matematica della realtà.

- comprendere le strutture portanti dei procedimenti argomentativi e dimostrativi della matematica, anche attraverso la padronanza del linguaggio logico-formale; usarle in particolare nell'individuare e risolvere problemi di varia natura;

Al termine del percorso didattico lo studente avrà approfondito i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, formalizzazioni), conoscerà le metodologie di base per la costruzione di un modello matematico di un insieme di fenomeni, saprà applicare quanto appreso per la soluzione di problemi, anche utilizzando strumenti informatici di rappresentazione geometrica e di calcolo. Tali capacità operative saranno particolarmente accentuate nel percorso del liceo scientifico, con particolare riguardo per quel che riguarda la conoscenza del calcolo infinitesimale e dei metodi probabilistici di base.

Le Indicazioni Nazionali-Modelli

- Essere in grado di utilizzare criticamente strumenti informatici e telematici nelle attività di studio e di approfondimento; comprendere la valenza metodologica dell'informatica nella formalizzazione e modellizzazione dei processi complessi e nell'individuazione di procedimenti risolutivi.

- saper utilizzare strumenti di calcolo e di rappresentazione per la modellizzazione e la risoluzione di problemi;

5) il concetto di modello matematico e un'idea chiara della differenza tra la visione della matematizzazione caratteristica della fisica classica (corrispondenza univoca tra matematica e natura) e quello della modellistica (possibilità di rappresentare la stessa classe di fenomeni mediante differenti approcci);
6) costruzione e analisi di semplici modelli matematici di classi di fenomeni, anche utilizzando strumenti informatici per la descrizione e il calcolo;

Le Indicazioni Nazionali
Altro (lingua naturale e filosofia)

Nell'ambito della produzione **orale** lo studente sarà abituato al rispetto dei turni verbali, all'ordine dei temi e all'efficacia espressiva. Nell'ambito della produzione **scritta** saprà controllare la costruzione del testo secondo progressioni tematiche coerenti, l'organizzazione logica entro e oltre la frase, l'uso dei connettivi (preposizioni, congiunzioni, avverbi e segnali di strutturazione del testo), dell'interpunzione, e saprà compiere adeguate scelte lessicali.

Lo studio dei diversi autori e la lettura diretta dei loro testi lo avranno messo in grado di orientarsi sui seguenti problemi fondamentali: l'ontologia, l'etica e la questione della felicità, il rapporto della filosofia con le tradizioni religiose, il problema della conoscenza, i problemi logici, il rapporto tra la filosofia e le altre forme del sapere, in particolare la scienza , il senso della bellezza, la libertà e il potere nel pensiero politico, nodo quest'ultimo che si collega allo sviluppo delle competenze relative a Cittadinanza e Costituzione.

Linguaggio naturale e matematico
Un esempio: l'articolo determinativo

3) Determina la funzione che meglio rappresenta il deflusso degli spettatori, e, indicando con t=0 l'apertura dei cancelli e t_c (da determinare) l'istante in cui, durante il deflusso, nell'impianto restano meno di 100 spettatori, disegna il grafico della funzione che rappresenta il numero di spettatori presenti nell'impianto nell'intervallo $[0; t_c]$; ipotizza che l'impianto sia riempito alla massima capienza e che la manifestazione sportiva duri un'ora. Determina inoltre la massima velocità di deflusso degli spettatori dall'impianto.

3. scegli una delle seguenti funzioni per modellizzare il processo di riscaldamento prima della liquefazione (T_a = temperatura ambiente, T_g = temperatura iniziale del ghiaccio, $T(t)$ = temperatura del ghiaccio all'istante t, dove t = tempo trascorso dall'inizio del riscaldamento, in minuti):

$$T(t) = (T_g - T_a)e^{-Kt}$$

$$T(t) = (T_a - T_g).(1 - e^{-Kt}) + T_g$$

$$T(t) = (T_a - T_g)e^{-Kt} - T_a$$

e determina il valore che deve avere il parametro K, che dipende anche dai processi produttivi, perché il blocco di ghiaccio non inizi a fondere durante il percorso verso il camion frigorifero.

Forma: aiuto o ostacolo?

Sinteticamente possiamo dire che $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ se:

$$\forall M > 0 \quad \exists I(x_0) \,|\, f(x) > M, \forall x \in I(x_0) - \{x_0\}.$$

103 $-\frac{1}{4}x^2 \leq 0$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

104 $3x(x-1) + (x^2+1) < 0$ $[\nexists\, x \in \mathbb{R}]$

DEFINIZIONE

Disposizioni semplici

Le disposizioni semplici di n elementi distinti di classe k (con $k \leq n$) sono tutti i gruppi di k elementi scelti fra gli n, che differiscono *per almeno un elemento o per l'ordine* con cui gli elementi sono collocati:

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-k+1), \text{ con } n, k \in \mathbb{N}.$$

DEFINIZIONE

Combinazioni semplici

Le combinazioni semplici di n elementi distinti di classe k (con $k \leq n$) sono tutti i gruppi di k elementi scelti fra gli n, che differiscono per almeno un elemento (ma non per l'ordine):

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}, \text{ con } n, k \in \mathbb{N}.$$

DEFINIZIONE

Variabile casuale (o aleatoria) discreta

Una variabile casuale discreta X è una variabile che può assumere i valori x_1, $x_2, \dots, x_n$ corrispondenti a eventi aleatori $E_1, E_2, \dots, E_n$, non impossibili, che si escludono a vicenda e tali che sicuramente uno di essi si verifichi.

DEFINIZIONE

Distribuzione di probabilità

Data una variabile casuale discreta X, con valori $x_1, x_2, \dots, x_n$, la successione delle probabilità $p_1, p_2, \dots, p_n$ a essi associate si chiama distribuzione di probabilità della variabile X.

Quando la forma diventa occasione didattica

a. $\left\{k\pi,\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$

b. $\left\{\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ \pm\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right\}$

A. $\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ \frac{5\pi}{3}+2k\pi\right\}$

B. $\left\{\frac{7\pi}{6}+2k\pi,\ \frac{11\pi}{6}+2k\pi\right\}$

$$\left\{x \in R \,/\, x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \vee x=\frac{5\pi}{3}+2k\pi, k \in Z\right\}$$

$$\left\{x \in R \,/\, \exists k \in Z\left(x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \vee x=\frac{5\pi}{3}+2k\pi\right)\right\}$$

$$\left\{x \in R \,/\, \exists k \in Z\left(x=\frac{\pi}{3}+2k\pi\right) \vee \exists k \in Z\left(x=\frac{5\pi}{3}+2k\pi\right)\right\}$$

Morfologia, sintassi e semantica delle equazioni

- Si fa presto a dire ‘equivalenti’ (in R?)….

$$x-1=0 \qquad y-1=0$$

$$(x-1)^2=0 \qquad x^3-1=0$$

$$(x=1)\vee(x=1)$$

$$x+\frac{1}{x}=1+\frac{1}{x}$$

Ragionamenti e deduzioni

13) Il seguente brano fa parte dell'O.M. n° 266 del 21/4/97 relativa alle modalità di scrutinio per la fine dell'anno scolastico 1996/97:
6. La frequenza assidua e la partecipazione attiva alla vita della scuola sono elementi positivi che concorrono alla valutazione favorevole del profitto dell'alunno in sede di scrutinio finale. Pertanto, il numero delle assenze, pur non essendo di per se stesso preclusivo della valutazione del profitto stesso incide tuttavia negativamente sul giudizio complessivo, a meno che da un congruo numero di interrogazioni e di esercitazioni scritte, grafiche o pratiche, svolte in casa o a scuola, corrette e classificate nel corso dell'intero anno scolastico, si possa accertare il raggiungimento degli obiettivi propri di ciascuna disciplina.
Dopo aver letto attentamente il brano proposto, rispondi alle seguenti domande:
a) cosa voleva dire chi ha scritto l'articolo? In particolare, nelle intenzioni, le numerose assenze dovrebbero pesare o no su un giudizio di promozione?
b) la partecipazione attiva dovrebbe pesare o no sulla valutazione del profitto?
c) il termine 'Pertanto' che cosa ti fa pensare?
d) da un punto di vista logico dal primo periodo puoi dedurre il secondo?
e) che cosa puoi concludere, da un punto di vista logico?

17) Gli alunni ottengono la promozione alla classe successiva per effetto dello scrutinio finale, purché riportino voto non inferiore a 6/10 in ciascuna disciplina o in ciascun gruppo di discipline e non meno di 8/10 in condotta[6]. Se Mario non sarà promosso, non andrà in vacanza. Mario ha avuto, nello scrutinio finale, 4/10 in matematica e 5/10 in italiano.

10) Tutti gli uomini sono bipedi e carnivori. Tutti i carnivori mangiano carne o formaggi. Esistono uomini che non mangiano carne. Quindi esistono bipedi che mangiano formaggi.

11) Non tutte le persone sono insegnanti. Tutti gli statali sono insegnati e impiegati. Quindi esistono persone non statali.
Sarebbe corretto concludere, dalle premesse precedenti, che
"Esistono persone che non sono impiegati" ?

Dopo aver formalizzato la frase *Non esistono persone buone o oneste*, stabilisci, dopo averle formalizzate, quale tra le seguenti frasi è tautologicamente equivalente a quella data:

a) Esistono persone non buone o non oneste.
b) Esistono persone cattive e disoneste
c) Tutte le persone sono cattive e disoneste
d) Tutte le persone sono cattive o disoneste.

La difficoltà e la potenza del linguaggio formale: un esempio

Teorema del limite di una funzione composta

Siano date le funzioni $f = \left(D_f, \mathbb{R}, G_f\right)$ e $g = \left(D_g, \mathbb{R}, G_g\right)$, con $x_0 \in D\left(D_g\right)$, e sia $Im_g \subseteq D_f$. Se esistono $\lim_{x\to x_0} g(x) = l_1$, con $l_1 \in D\left(D_f\right)$, e $\lim_{x\to l_1} f(x) = l$, con $l_1, l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$, allora esiste $\lim_{x\to x_0} \left(f\left(g(x)\right)\right) = l$

<u>Dimostrazione</u>

Nella dimostrazione indicheremo gli elementi del dominio di g con la variabile x , mentre quelli del dominio di f con la variabile y.

Hp:

$$(1) \lim_{x\to x_0} g(x) = l_1 \quad \leftrightarrow \quad \boxed{\forall U' \in F_{l_1}} \; \boxed{\exists V \in F_{x_0}} \; \boxed{\forall x \in \left(D_g \cap (V - \{x_o\})\right)} \; \boxed{\left(g(x) \in U'\right)}$$

$$(2) \lim_{y\to l_1} f(y) = l \quad \leftrightarrow \quad \boxed{\forall U \in F_l} \; \boxed{\exists V' \in F_{l_1}} \; \boxed{\forall y \in \left(D_f \cap (V' - \{l_1\})\right)} \; \boxed{\left(f(y) \in U\right)}$$

Th:

$$\lim_{x\to x_0} \left(f\left(g(x)\right)\right) = l \quad \leftrightarrow \quad \boxed{\forall U \in F_l} \; \boxed{\exists V \in F_{x_0}} \; \boxed{\forall x \in \left(D_g \cap (V - \{x_o\})\right)} \; \boxed{\left(f\left(g(x)\right) \in U\right)}$$

Espressioni algebriche con addizioni

Il concetto di espressione algebrica è perfettamente analogo a quello di espressione aritmetica; essa è infatti una successione di numeri relativi legati tra loro da un segno di operazione. Per calcolarne il valore si usano le stesse regole studiate per le espressioni aritmeti-

In (M5):

Un'espressione letterale è una sequenza di operazioni fra numeri rappresentati tutti o in parte da lettere.

In (S7):

D Si dice **espressione algebrica letterale**, o semplicemente **espressione letterale**, ogni scrittura che indichi operazioni da eseguire su numeri e lettere assegnati.

In (S3):

2.1 Espressioni

Con il termine **espressione** intendiamo scritture del tipo:

$$3\cdot 5+7; \qquad \frac{2^3+6}{3\cdot(7^3:7)}; \qquad \frac{2a-3b}{5+b}; \qquad (a+b^2); \qquad \frac{(B+b)\cdot h}{2}$$

$$a-(2a-3)-(1+2a)-(a-4); \quad (a+b)^2\cdot(a-b)^2; \quad \frac{7}{a-2b}$$

con le quali **si denota un unico oggetto matematico.** In esse figurano numeri, lettere, simboli di operazioni e parentesi.