



# Triangoli continui, Progressioni geometriche e Spirali logaritmiche

**Giovanni Vincenzi**

Università di Salerno

`vincenzi@unisa.it`

*Educare alla razionalità. In ricordo di Paolo Gentilini  
10 giugno 2016, Sestri Levante*

# Una questione elementare

Ci sono alcune questioni elementari che possono destare curiosità e avere una certa valenza a livello didattico. Consideriamo ad esempio il seguente problema:

“Siano  $\mathcal{T} = (a, b, c)$  e  $\mathcal{T}' = (a', b', c')$  due triangoli di lati rispettivamente  $a, b, c$  e  $a', b', c'$ . Se  $\mathcal{T}$  e  $\mathcal{T}'$  sono simili e  $a$  è congruo ad  $a'$  e  $b$  è congruo a  $b'$  allora possiamo concludere che i triangoli  $\mathcal{T}$  e  $\mathcal{T}'$  sono congrui?” Equivalentemente possiamo formulare questo quesito come segue:

“Due triangoli che hanno 5 elementi congruenti sono necessariamente congruenti?”

# Esempi di coppie di triangoli quasi congruenti

Come mostrano i seguenti esempi la risposta è negativa.

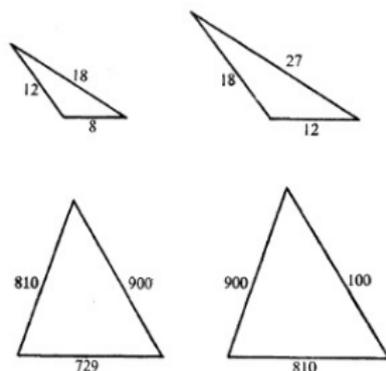


Figura: Esempi di triangoli quasi congruenti

Coppie di triangoli di questo tipo si dicono *quasi congruenti*, e sono state oggetto di vari studi (vedi ad esempio [R. T. Jones e B. B. Peterson, 1974] [M. Pennisi, 1994] [J. T. F. Briggs, 1997] [F. Laudano, 2001] [G. Anatriello e —, 2016])

# Triangoli quasi congruenti e progressioni geometriche

Si osservi che negli esempi precedenti le coppie di triangoli quasi congruenti hanno i lati in progressione geometrica.

Siano  $u$  e  $r$  numeri reali positivi. Una successione numerica del tipo  $ur, ur^2, ur^3, \dots, ur^n$  si chiama *progressione geometrica di ragione  $r$* . Nel primo esempio riportato, valutando i rapporti dei lati, abbiamo:  $18 : 12 = 12 : 8$  e  $27 : 18 = 18 : 12$ . Questi rapporti valgono tutti  $3/2$ . Posto  $r = 3/2$  e  $u = 16/3$ , la misura dei lati può essere espressa come segue:

$$8 = u \cdot r = 16/3 \cdot 3/2,$$

$$12 = u \cdot r^2 = 16/3 \cdot 9/4,$$

$$18 = u \cdot r^3 = 16/3 \cdot 27/8,$$

$$27 = u \cdot r^4 = 16/3 \cdot 81/16.$$

Da cui si evince che i lati sono in progressione geometrica e che i due triangoli sono simili.

Assegnato un triangolo  $\mathcal{T}$ , possiamo affermare che esiste un triangolo  $\mathcal{T}'$  tale che  $\mathcal{T}$  e  $\mathcal{T}'$  siano quasi congruenti?

Nella maggior parte dei casi la risposta è negativa: essa dipende dalla scelta del triangolo  $\mathcal{T}$ !

Un triangolo per cui il quesito precedente ha risposta positiva verrà detto *triangolo continuo* (vedi in [M. Pennisi, 1994]). Chiaramente se un triangolo  $\mathcal{T}$  è continuo, ogni altro triangolo  $\mathcal{T}'$  che sia quasi congruente a  $\mathcal{T}$  sarà anch'esso continuo; in particolare sarà simile a  $\mathcal{T}$ .

# Triangoli di Keplero

Una notevole classe di esempi di triangoli continui è quella dei *Triangoli retti Aurei (Golden right triangles)*, detti anche *Triangoli di Keplero*. Essi sono definiti come quei triangoli rettangoli in cui la lunghezza dei lati soddisfa la seguente proporzione:

*Ipotenusa : cateto maggiore = cateto maggiore : cateto minore.*

Perché esistono triangoli siffatti?

L'esistenza di tali triangoli è assicurata dalla relazione  $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$ , dove  $\Phi$  è il numero d'oro.

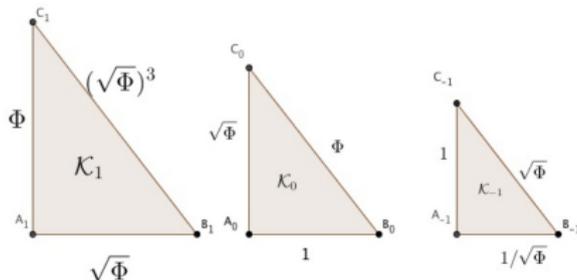


Figura: Esempi di Triangoli di Keplero

# Curiosità: triangoli 'vicini' a quelli di Keplero

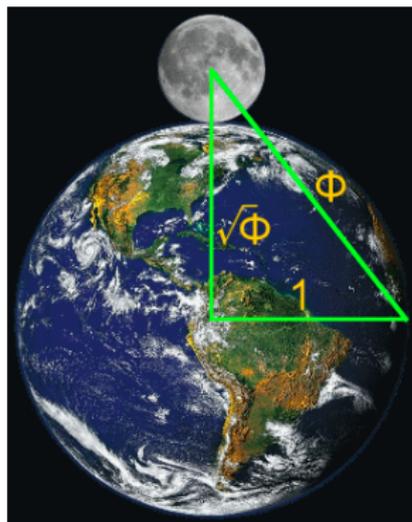
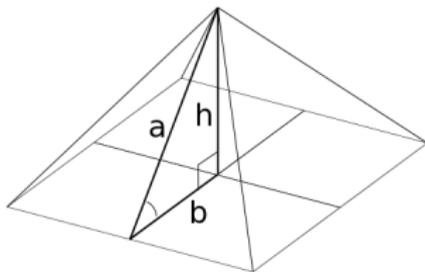
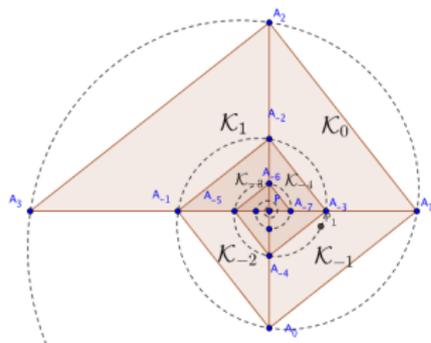


Figura: 1) La piramide di Giza e  $\Phi$  ( vedi [Herz-Fischer, (2000)]); 2) Terra-Luna- $\Phi$

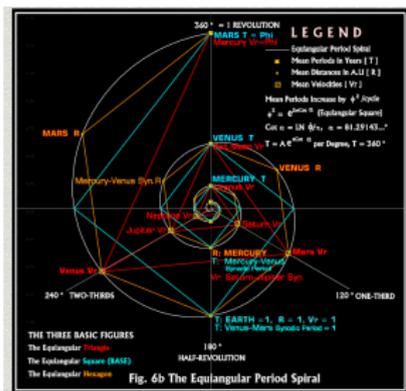
# I Triangoli di Keplero e la *Spira solaris*

È noto (vedi ad esempio in [M. Pennisi (1994)]) che disponendo opportunamente i triangoli di Keplero della catena  $\{((\sqrt{\Phi})^n, (\sqrt{\Phi})^{n+1}, (\sqrt{\Phi})^{n+2})\}_{n \in \mathbb{Z}}$  si ottiene una poligonale i cui vertici appartengono ad una particolare spirale logaritmica: La Spira Solaris



**Figura:** La *Spira solaris* antioraria. L'equazione è:  
 $\rho = \Phi^{\theta/\pi}$ , punto iniziale (1,0).

Keplero mise in connessione questa spirale logaritmica con alcuni pianeti del sistema solare. Ecco perché il nome "Spira Solaris".



**Figura:** La *Spira solaris* oraria.  
 $\rho = \Phi^{-\theta/\pi}$ , punto iniziale (1,0).  
 (vedi in [www.spirasolaris.ca])

# Nuovo problema che ci si può porre

Poiché i Triangoli di Keplero descrivono la Spira solaris, ci si chiede se altri triangoli possono essere utilizzati per descrivere altre spirali logaritmiche. Alla luce delle considerazioni fatte, sembra che i candidati più idonei per risolvere questo problema siano i triangoli continui. È opportuno quindi richiamare alcune loro proprietà (vedi in [Jones e Peterson (1974): Theorem 1], [M. Pennisi (1994), pag. 22]); oppure [G. Anatriello e — (2016), Theorem 2.1]).

# Caratterizzazione dei triangoli continui

## Teorema

*Sia  $\mathcal{T} = (a, b, c)$  un triangolo. Se  $\mathcal{T}$  è continuo, allora i lati  $a, b, c$  sono in progressione geometrica di ragione appartenente a  $(1/\Phi, \Phi) \setminus \{1\}$ . Viceversa, per ogni progressione geometrica  $ur, ur^2, ur^3$ , dove  $u$  è un numero reale positivo e la “ragione”  $r$  giace in  $(1/\Phi, \Phi) \setminus \{1\}$ , il triangolo  $(ur, ur^2, ur^3)$  è continuo.*

Per il teorema precedente rimane definita *la ragione* di un triangolo continuo. Essa sarà un numero diverso da 1, compreso tra  $1/\Phi$  e  $\Phi$ .

## Corollario

*Se  $1 \neq r \in (1/\Phi, \Phi)$ , allora per ogni intero  $n$  possiamo considerare il triangolo continuo  $\mathcal{T}_n = (r^n, r^{n+1}, r^{n+2})$ .*

La scrittura “ $\mathcal{T}_n < \mathcal{T}_m$ ” indica che l’area di  $\mathcal{T}_n$  è minore dell’area di  $\mathcal{T}_m$ .

# Osservazioni sui triangoli continui

Si verifica facilmente che se  $r \in (1/\Phi, 1/\sqrt{\Phi}) \cup (\sqrt{\Phi}, \Phi)$ , allora i triangoli corrispondenti sono ottusi e se  $r \in (1/\sqrt{\Phi}, \sqrt{\Phi}) \setminus \{1\}$ , allora i triangoli corrispondenti sono acuti. Inoltre, se  $r$  è esattamente  $\sqrt{\Phi}$  (oppure  $1/\sqrt{\Phi}$ ), abbiamo che  $(ur, ur^2, ur^3)$  definisce un triangolo di Keplero, per ogni positivo  $u$ .

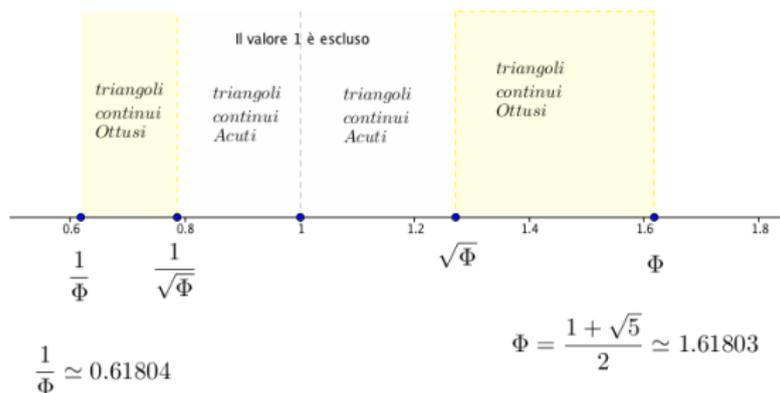


Figura: Ragione ammissibile per un triangolo continuo

# Catene di triangoli continui

Chiaramente, per ogni  $r \in (1/\Phi, \Phi)$ , gli insiemi di triangoli continui

$$\{\mathcal{T}_n\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{(r^n, r^{n+1}, r^{n+2})\}_{n \in \mathbb{Z}} \text{ e}$$

$$\{\mathcal{T}'_n\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{((\frac{1}{r})^n, (\frac{1}{r})^{n+1}, (\frac{1}{r})^{n+2})\}_{n \in \mathbb{Z}} \text{ coincidono.}$$

D'altra parte è opportuno osservare che queste due catene di triangoli continui presentano un comportamento “duale”:

se  $1 < r$ , allora la catena  $(\mathcal{T}_n)$  è ascendente, mentre  $(\mathcal{T}'_n)$  è discendente;

se  $r < 1$ , allora la catena  $(\mathcal{T}_n)$  è discendente, mentre  $(\mathcal{T}'_n)$  è ascendente.

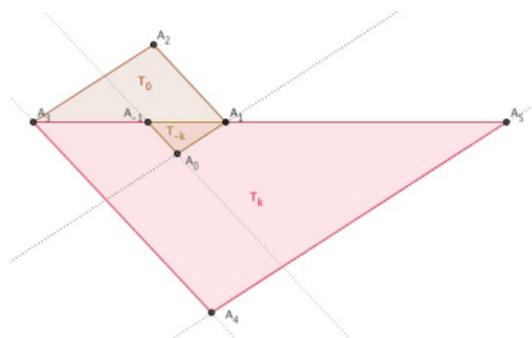
Per questo motivo è possibile restringere lo studio di queste catene al caso in cui  $r \in (1, \Phi)$ , e quindi considereremo la catena ascendente di triangoli  $(\mathcal{T}_n)$ .

# 1. Le $(r,k)$ -spirali (vedi [G. Anatriello e — (2016), paragrafo 3])

Sia  $r \in (1, \Phi)$ , e fissiamo un intero positivo  $k$ . Consideriamo la (sotto)catena  $\{\mathcal{T}_{nk}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ . Partendo da  $\mathcal{T}_0 = (1, r^1, r^2) = (A_1, A_2, A_3)$ , possiamo considerare i triangoli  $\mathcal{T}_k = (r^k, r^{k+1}, r^{k+2}) = (A_3, A_4, A_5)$  e  $\mathcal{T}_{-k} = (r^{-k}, r^{-k+1}, r^{-k+2}) = (A_1, A_0, A_{-1})$ , e così via ...

Osserviamo che i triangoli  $\dots, \mathcal{T}_{-2k}, \mathcal{T}_{-k}, \mathcal{T}_0, \mathcal{T}_k, \mathcal{T}_{2k}, \dots$  sono simili, e il rapporto di similitudine di due consecutivi è  $r^k$ .

Utilizzando la loro similitudine, possiamo effettuare la seguente costruzione:



## 2. Le $(r,k)$ -spirali

Iterando questa costruzione, otteniamo una poligonale a forma di spirale,  $\mathcal{P}_{r,k}$ , che chiameremo  $(r,k)$ -spirale a base triangolare, o più semplicemente  $(r,k)$ -spirale. Il termine usato in inglese è  $(r,k)$ -male spiral

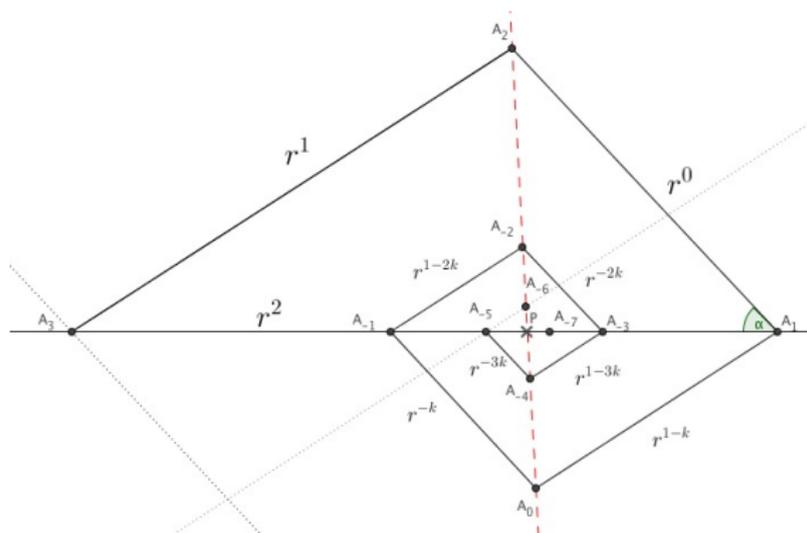


Figura: Il polo di una  $(r,k)$ -spirale (vedi figure 6 e 11 bis- geogebra)

### 3. Il polo e la crescita delle $(r,k)$ -spirali

#### Lemma

Sia  $r \in (1, \Phi)$  e  $k \in \mathbb{N}$ . Sia  $\mathcal{P}_{r,k}$  la  $(r,k)$ -spirale. Allora tutti i vertici  $A_{2n}$  giacciono su una retta  $s$ . Sia  $P$  l'intersezione tra  $s$  e la retta contenente tutti i vertici di indice dispari, risulta che ogni  $A_{1-4n}$  giace a destra di  $P$  e ogni  $A_{3-4n}$  giace a sinistra di  $P$ , per ogni intero  $n$ . Inoltre

$$(a) \quad |\overline{A_3 P}| = \sum_{n=0}^{\infty} |\overline{A_{3-4n} A_{3-4(n+1)}}| = \frac{r^{2+k}}{r^k + 1};$$

$$(b) \quad |\overline{A_1 P}| = \sum_{n=0}^{\infty} |\overline{A_{1-4n} A_{1-4(n+1)}}| = \frac{r^2}{r^k + 1};$$

$$(c) \quad |\overline{A_2 P}| = \sum_{n=0}^{\infty} |\overline{A_{2-4n} A_{2-4(n+1)}}| = \frac{\sqrt{r^{2k} + r^k - r^{k+4} + r^{k+2} + r^2}}{(r^k + 1)};$$

$$(d) \quad |\overline{A_0 P}| = \sum_{n=0}^{\infty} |\overline{A_{4n} A_{-4(n+1)}}| = \frac{\sqrt{r^{2k} + r^k - r^{k+4} + r^{k+2} + r^2}}{r^k (r^k + 1)}.$$

# Controesempio

Chiaramente, possiamo tentare di costruire una “spirale” del tipo suddetto a partire da un qualunque triangolo, ma in generale il risultato precedente non vale. Precisamente, se a partire da un triangolo generico consideriamo una successione di triangoli simili ad esso e con progressivo rapporto di similitudine costante, allora, effettuando la costruzione precedente, si può constatare che in i vertici pari non risultano allineati.

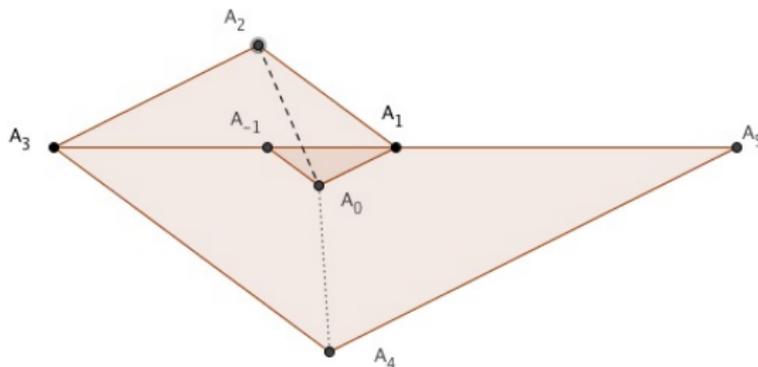


Figura: Costruzione con una catena di triangoli simili, ma non continui

# Leonardo Sinisgalli e le Spirali logaritmiche

*È innegabile che le nostre conoscenze geometriche sono veramente rudimentali. Ne sappiamo poco più di una formica o di un cavallo, e certamente meno di una chiocciola . Leonardo Sinisgalli (1908-1981).*

Leonardo Sinisgalli (1908-1981), principalmente noto come poeta della corrente letteraria dell' ermetismo. Sinisgalli fu a lungo combattuto tra la sua passione per la matematica e la poesia. Si iscrisse prima a Matematica e poi a Fisica presso l'Università di Roma, e li conobbe Matematici come F. Severi, Fantappiè G. Castelnuovo, poi si iscrisse ad ingegneria industriale, e nel frattempo grazie alle sue frequentazioni con gli ambienti intellettuali romani, entrò in contatto con Libero de Libero e Arnaldo Beccaria, i pittori Mario Mafai e Gino Bonichi detto Scipione. Nel 1932 si trasferisce a Milano dove frequenta i poeti Alfonso Gatto, Raffaele Carrieri, Salvatore Quasimodo e il pittore Domenico Cantatore, e nel 1934 ottiene il primo posto per la poesia nei "Littoriali per la gioventù" a Firenze, con una giuria composta da Riccardo Bacchelli, Giuseppe Ungaretti e Aldo Palazzeschi.

(Per approfondimenti su Sinisgalli vedi articolo di I. Bischi in [P. Maroscia, C. Toffalori, S.T. Tortoriello e G. Vincenzi, (2016)]

**A proposito dell'approssimazione della spirale logaritmica ottenuta dalla sezione del guscio della chiocciola vedi in [J. Sharp, (2002)].**

# Le spirali logaritmiche

Una *spirale logaritmica* è una curva piana la cui equazione in coordinate polari  $(\rho, \theta)$  è  $\rho = te^{(h\theta)}$ . Il termine  $h$  è un numero positivo chiamato *costante di crescita* della spirale (da non confondere col ‘fattore di crescita’, la cui definizione verrà richiamata tra breve), e  $t$  è la *costante della spirale* che dipende dalla scelta della condizione iniziale  $\theta = 0$ . Rileviamo che l’incremento di  $\theta$  è inteso in senso antiorario. Una rappresentazione cartesiana di una spirale logaritmica è la seguente:

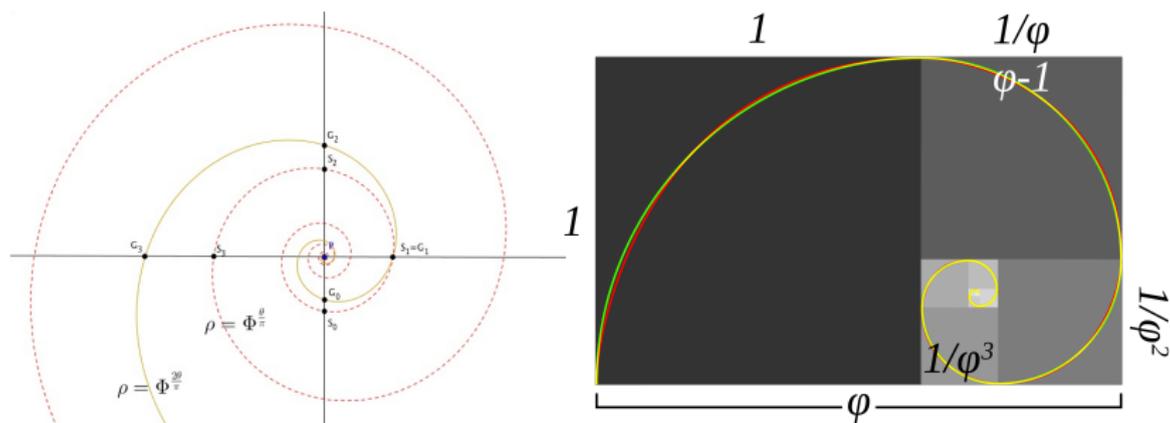
$$(1) \quad \begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta)\cos(\theta) = te^{(h\theta)}\cos(\theta) \\ y(\theta) = \rho(\theta)\sin(\theta) = te^{(h\theta)}\sin(\theta). \end{cases}$$

La distanza dall’origine (polo della spirale) del punto  $(x(\theta), y(\theta))$  cresce esponenzialmente al crescere di  $\theta$ .

# Spirali logaritmiche famose

La più celebre tra le spirali logaritmiche è la *Spirale d'oro* (Golden Spiral) la cui equazione è

$$\rho = e^{(2/\pi) \lg(\Phi)\theta} = \Phi^{2\theta/\pi} \quad \text{con punto iniziale } (1,0).$$



**Figura:** A sinistra Spira solaris (linea rossa tratteggiata), e la Spirale d'oro (linea color oro); a destra la Spirale d'oro e quella di Fibonacci

# Spirali logaritmiche

Notiamo che la costante di crescita è  $(2/\pi) \lg(\Phi)$ . Inoltre, per  $\theta = 0$  abbiamo  $\rho = 1$ , per  $\theta = \pi/2$  abbiamo  $\rho = \Phi$ . In generale si vede facilmente che la Spirale d'oro si allontana dall'origine di un fattore  $\Phi$  per ogni quarto di giro (in senso antiorario); pertanto

“  $\Phi^4$  ” dà la misura del *fattore di crescita* di questa spirale dopo un giro completo attorno all'origine.

In generale se  $\mathcal{S}$  è una spirale di equazione  $\rho = te^{(1/\pi) \lg(r^k)\theta} = tr^{k\theta/\pi}$ , dove  $t$  dipende dal punto iniziale  $(\rho(0), 0)$ , il suo fattore di crescita è  $r^{2k}$ .

Un'altra celebre spirale logaritmica è la *Spirale di Fidia* (*Pheidia Spiral*), la cui equazione è:

$$\rho = e^{(1/2\pi) \lg(\Phi)\theta} = \Phi^{\theta/2\pi}, \quad \text{Con punto iniziale } (1,0).$$

Notiamo che la Pheidia Spirals, Spira Solaris, and Golden Spiral hanno rispettivamente le seguenti “crescite”:  $\Phi$ ,  $\Phi^2$ ,  $\Phi^4$ .

# Spirali logaritmiche associate ad una $(r, k)$ -spirale (vedi [G. Anatriello e — (2016), paragrafo 4])

Si può provare che ogni  $(r, k)$ -spirale è connessa ad una coppia di spirali logaritmiche:  $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_1(r, k)$  e  $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_2(r, k)$ . Precisamente

## Teorema

*Sia  $r \in (1, \Phi)$ , e  $k$  un intero positivo. Allora tutti i vertici  $A_{1-2n}$  (indicati da numeri dispari) della  $(r, k)$ -spirale  $\mathcal{P}_{r,k}$ , giacciono su una spirale logaritmica  $\mathcal{S}_1$  di crescita  $r^{2k}$  e con punto iniziale  $A_1 = (\frac{r^2}{r^k+1}, 0)$ , e tutti i vertici “pari” giacciono su una spirale logaritmica  $\mathcal{S}_2$  con lo stesso fattore di crescita  $r^{2k}$  e con un opportuno punto iniziale  $H$  dipendente da  $r$  e da  $k$ .*

Per commentare l'enunciato si può proiettare il file geogebra in cui si evince la validità del risultato (nome file: even-odd-spiral )

# Spirali logaritmiche associate ad una $(r, k)$ -spirale

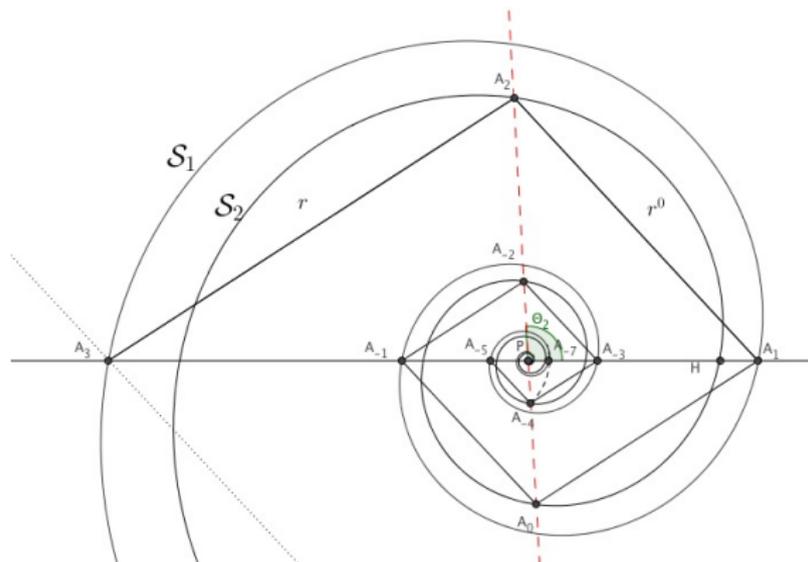


Figura: Spirali logaritmiche associate ad una  $(r, k)$ -spirale

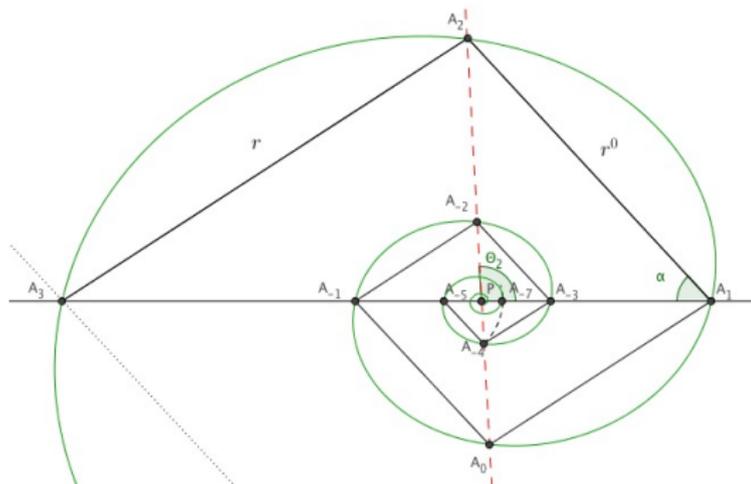
# Spirali logaritmiche di tipo ellittico 'associabili' ad una $(r, k)$ -spirale

*La spirale ellittica logaritmica*

È una curva la cui equazione cartesiana è:

$$\begin{cases} x(\theta) = t_1 r^{h\theta/\pi} \cos(\theta) \\ y(\theta) = t_2 r^{h\theta/\pi} \sin(\theta) \end{cases}$$

I valori  $t_1$  e  $t_2$  sono parametri dipendenti dalle condizioni iniziali.



**Figura:** Spirale ellittica che approssimativamente passa per i vertici di una  $(1.35, 2)$ -spirale

Per approfondimenti vedi [C. Baumgarten e G. Farin, (1997)], [S. Szalabaj, (2005)], [R.J. Cripps, M.Z. Hussain and S. Zhu, (2010)], [F. Combes, P. Boissè, A. Mazure, (2002)] e [T. A. Cook, (1979)].

# Discretizzazione di una spirale logaritmica mediante triangoli continui

Abbiamo visto che ogni  $(r, k)$ -spirale è connessa ad una coppia di spirali logaritmiche:  $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_1(r, k)$  e  $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_2(r, k)$ .

Viceversa, sia  $\mathcal{S}$  una spirale logaritmica di equazione  $\rho = te^{h\theta}$ , allora  $\mathcal{S}$  può essere discretizzata da una  $(r, k)$ -spirale. Infatti

$$(2) \quad \forall h \in \mathbb{R}^+ \quad \lim_n \sqrt[n]{e^{h\pi}} = 1,$$

Per cui esistono infinite coppie,  $(k, \sqrt[k]{e^{h\pi}})$ , tali che  $k$  è un intero positivo e  $\sqrt[k]{e^{h\pi}}$  giace in  $(1, \Phi)$ . Perciò possiamo scrivere l'equazione della spirale  $\mathcal{S}$  come segue:

$$(3) \quad \rho = te^{h\theta} = tr^{\frac{k\theta}{\pi}} \quad \text{dove} \quad r = \sqrt[k]{e^{h\pi}}.$$

Un'applicazione del teorema precedente prova che i vertici dispari della  $(\sqrt[k]{e^{h\pi}}, k)$ -spirale discretizzano  $\mathcal{S}$ .

Grazie



G. Anatriello and G. Vincenzi. *Logarithmic spirals and continue triangles*. Journal of Computational and Applied Mathematics. (2016); 296C:127–137. Doi 10.1016/j.cam.2015.09.004



C. Baumgarten and G. Farin. *Approximation of logarithmic spirals*. Computer Aided Geometric Design. (1997);14 (6):515–532.



J. T. F. Briggs. *Almost congruent triangles with integral sides*. The Mathematics Teacher. (1997);70(3):253–257.



R.J. Cripps, M.Z. Hussain and S. Zhu. *Smooth polynomial approximation of spiral arcs*. Journal of Computational and Applied Mathematics. (2010);233(9):2227–2234.



F. Combes, P. Boissè, A. Mazure, A. Blanchard *Galaxies and Cosmology*. New York: Springer; 2002.



T. A. Cook. *The curves of the life*. New York: Dover; 1979.



F. Laudano *Questioni sui criteri di congruenza*. Periodico di Matematica (2001);1:XX–XX.



P. Maroscia, C. Toffalori, S.T. Tortoriello e G. Vincenzi *Introduzione al testo "Matematica e Letteratura - Analogie e convergenze"*. Utet-De Agostini, Novara, 2016.



R. Herz-Fischer. *The Shape of the Great Pyramid*. Waterloo (Ontario): Wilfrid Laurier University Press; 2000.



R. T. Jones and B. B. Peterson. *Almost congruent triangles*. Math Magazine. (1974);47(4):180–189.



M. Pennisi. *Triangles et Moyennes*. Metematique et Pedagogie; (1994);99:21–26.



J.C. Perez. *Chaos DNA and Neuro-computers: a golden link / The hidden language of genes, global language and ordre in the human genome*. Speculations in Science and Technology. (1991);14(4): 336–346.



Sharp, J. (2002) *Spirals and the Golden Section* Nexus network Journal, 4(1): 59-82.



Piazz Smith. *The Great Pyramid*. New York: Bell; 1978.



P. Szalapaj. *Contemporary Architecture and the Digital Design Process*. New York: Routledge-Architectural press; 2005.



[www.spirasolaris.ca](http://www.spirasolaris.ca)

# Bibliografia relativa ad argomenti correlati

 B. J. Mc. Cartin. *Mysteries of equilateral triangle*. Kettering: Hikari; 2010.

 E. P. Doolan. *A Sacred Geometry of the Equilateral Triangle*. Int J Math Educ in Sci Technol. (2008);39(5):601–629.

 A. Fiorenza and G. Vincenzi. *Limit of ratio of consecutive terms for general order-k linear homogeneous recurrences with constant coefficients*. Chaos, Solitons & Fractals. (2011);44(1):145–152.

 C. Gorini. *Geometry at works- Papers in applied Geometry*. MAA (2000); Notes Number 53.

 Utpal Mukhopadhyay. *Logarithmic spiral – A splendid curve*. Resonance. (2004);9(11):39–45.

 S. K. Saha. *Aperture Synthesis: Methods and Applications to Optical Astronomy*. Springer Science & Business Media; 2010.

 S. Siani and G. Vincenzi. *Fibonacci-like sequences and generalized Pascal's triangles*. Int J Math Educ in Sci Technol. (2014);45(4):609-614.

 R. Takaki and N. Ueda. *Analysis of spirals Curves in Traditional Cultures*. Forum. (2007);22: 133-139.

 G. Vitiello. *Fractals, coherent states and self-similarity induced noncommutative geometry*. Physics Letters A. (2012);376(37):2527–2532.

 [www.greatbuildings.com/building/Nathaniel\\_Russell\\_House.html](http://www.greatbuildings.com/building/Nathaniel_Russell_House.html)

 <http://www.dyscario.com/design/beautiful-and-unique-design-of-spiral-house-in-spain-madrid.html>

 <https://www.behance.net/gallery/4446217/elliptical>