a cura di G. Faglia - G. Pighizzini

Un invito alla teoria delle specie di Joyal

Appunti dal corso di Giancarlo Rota

AILA PREPRINT

n. 2 luglio-ottobre 1990

Direttore Responsabile: Ruggero Ferro
Iscrizione al Registro Stampa del Tribunale di Padova n. 1235 del 26.9.1990

Pubblicato con il contributo di:

Cassa di Risparmio di Padova e Rovigo

Stampa: Rotografica Padova

UN INVITO ALLA TEORIA DELLE SPECIE DI JOYAL

appunti dal corso del Prof. G. C. Rota
a cura di
G. Faglia - G. Pighizzini

1 Considerazioni preliminari.

La teoria delle specie[1] è una teoria combinatoria che consente un approccio sistematico alla risoluzione di problemi di carattere enumerativo. L'analisi enumerativa è uno dei campi di interesse della analisi combinatoria e, come noto, concerne essenzialmente problemi di conteggio, quali conteggio di strutture d'ordine, di permutazioni con certe restrizioni, di strutture probabilistiche, per la soluzione dei quali si fa uso di varie tecniche in cui è ben nota l'utilità delle serie formali di potenza. Nella teoria delle specie [Jo 81] l'interpretazione combinatoria delle serie formali è basata sul concetto di specie di struttura dovuto a Bourbaki. Tuttavia in essa, seguendo il punto di vista di Ehresmann [Eh 65], si mette in rilievo più il trasporto della struttura che le proprietà che la definiscono.

Definizione 1.1 *(complesso simpliciale)*
Un ***complesso simpliciale*** *su un insieme finito E, è una famiglia S di sottoinsiemi di E alla quale appartiene il singoletto $\{x\}$ per ogni $x \in E$ e tale che se $F \in S$ ed $H \subseteq F$ anche H appartiene ad S. Ogni elemento di S è detto* ***faccia*** *e la* ***dimensione*** *di una faccia F è $|F| - 1$.*

Definizione 1.2 *(grafo)*
Un ***grafo*** *è un complesso simpliciale in cui le facce hanno dimensione al più 1. Le facce di dimensione 0 si dicono* ***vertici****, quelle di dimensione 1 si dicono* ***lati****. Dato un grafo G possiamo definire la seguente relazione di equivalenza sull'insieme dei vertici V: x è equivalente ad y se e solo se esistono $x_1, x_2, \ldots, x_n$*

[1] Questi appunti sono stati esaminati in profondità e riveduti dai Drr. D. Senato e A. Venezia. A loro vanno i ringraziamenti dei curatori.

appartenenti a V con $x_1 = x$ e $x_n = y$ tali che per ogni $i = 1 \ldots n-1$ l'insieme $\{x_i, x_{i+1}\}$ sia una faccia di G. L'insieme di tali facce si dice *cammino* di estremi x e y e lunghezza $n-1$. Un *circuito* è un cammino in cui gli estremi coincidono.

Un grafo si dice connesso se per ogni coppia di vertici (x,y) esiste un cammino di estremi x e y. Un albero è un grafo connesso senza circuiti.

Esempio 1.1

Alberi e grafi su un insieme finito sono esempi di strutture combinatorie. Se E ed F sono insiemi finiti equipotenti, una struttura su E, ad esempio d'albero, può essere trasportata su F assegnando una biezione $u: E \to F$. La biezione $u: E \to F$ ci consente di definire una biezione $a[u]$ dall'insieme $a[E]$ degli alberi su E all'insieme $a[F]$ degli alberi su F, che appunto trasporta la struttura (fig. 1).

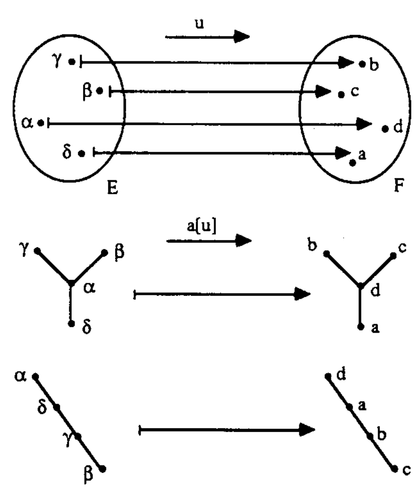


Fig. 1

Osserviamo che se $E = F$ e $u = id_E$ è l'identità allora si ha:

1. $$a\,[id_E] = id_{a[E]}.$$

Inoltre se E, F e G sono insiemi finiti equipotenti e u e v sono biezioni rispet-

tivamente da E in F e da F in G, allora risulta:

2. $$a[v \circ u] = a[v] \circ a[u].$$

La funzione che ad ogni insieme finito E associa l'insieme $a[E]$ degli alberi su E e quella che ad ogni biezione $u: E \to F$ associa la biezione $a[u]: a[E] \to a[F]$ definiscono una specie: la specie a degli alberi.

2 Specie e serie formali.

Il supporto matematico necessario alla formalizzazione del concetto di specie è dato dalla Teoria delle Categorie che al primo livello è un conveniente linguaggio concettuale basato sulle nozioni di categoria, funtore e trasformazione naturale [ML 77].

Definizione 2.1 *(categoria)*

Una categoria $\mathbf{C}$ è assegnata quando è data una classe di oggetti $ob(\mathbf{C})$ ed un insieme di morfismi $Morf(\mathbf{C})$ tali che per ogni coppia di oggetti (a,b) sia assegnato un insieme di morfismi $Hom(a,b)$ e per ogni terna di oggetti una legge di composizione associativa:

$$\circ: (f,g) \in Hom(a,b) \times Hom(b,c) \to g \circ f \in Hom(a,c)$$

tale che per ogni oggetto a esiste un morfismo identità $i_a \in Hom(a,a)$ per il quale si ha: $i_a \circ f = f$ e $f' \circ i_a = f'$ per ogni f ed f'.

Esempio 2.1

La categoria dei gruppi è quella i cui oggetti sono i gruppi, i morfismi sono gli omomorfismi tra gruppi e la legge di composizione è l'ordinaria composizione tra applicazioni.

Esempio 2.2

La categoria $\mathbf{B}$ degli insiemi finiti e biezioni è la categoria i cui oggetti sono gli insiemi finiti, i morfismi sono le biezioni tra essi e la legge di composizione è l'ordinaria composizione tra applicazioni.

Definizione 2.2 *(specie)*

Una specie è un funtore dalla categoria $\mathbf{B}$ degli insiemi finiti e delle biezioni in $\mathbf{B}$. In altri termini una specie M è una coppia di funzioni:

- *una funzione da $ob(\mathbf{B})$ in $ob(\mathbf{B})$ che associa ad ogni insieme finito E un insieme finito $M[E]$, i cui elementi saranno detti M-strutture;*

- *una funzione da Morf(**B**) in Morf(**B**) che ad ogni biezione u da E in F ($E, F \in \mathbf{B}$) associa una biezione $M[u]$ da $M[E]$ in $M[F]$, tale che per ogni coppia di biezioni $u: F \to H$ e $v: E \to F$ si abbia $M[u \circ v] = M[u] \circ M[v]$ e $M[id_E] = id_{M[E]}$. Se E è un insieme finito, $M[E]$ è l'insieme di tutte le strutture di specie M su E; diremo che E è l'insieme soggiacente ad una struttura s di $M[E]$ o anche che quest'ultima è portata da E. Si dirà anche, con abuso di linguaggio, che s è un elemento di M.*

Nell'affrontare problemi di conteggio ci si trova di fronte a funzioni $f(k)$ della variabile intera $k = 0, 1, 2, \ldots$, essendo $f(k)$ il numero delle strutture che si vogliono contare su un insieme di k elementi. La maggior parte delle tecniche di risoluzione riguardano gli $f(k)$ come coefficienti di una serie formale di potenze. Le specie forniscono un'interpretazione categorica di strutture combinatorie e dunque ci si aspetta che ad esse possano essere associate serie formali di potenze in modo che ad operazioni tra serie formali corrispondano analoghe operazioni tra specie.

Definizione 2.3 *(funzione generatrice di una specie)*
*La **funzione generatrice** della specie M è la serie formale di potenze[2] definita da:*

$$gen(M; x) = \sum_{k \geq 0} a_k \frac{x^k}{k!}$$

dove a_k è il numero di M-strutture su un insieme E di cardinalità k.

Si osservi che la definizione è ben posta in quanto la cardinalità di $M[E]$ dipende solo dalla cardinalità di E.

Esempio 2.3
La ***specie uniforme*** U è definita come:

$$U[E] = \{E\};$$

la sua funzione generatrice è

$$gen(U; x) = \sum_{k \geq 0} 1 \frac{x^k}{k!} = e^x$$

[2] *Cfr.* [St 78] o [GJ 83].

Esempio 2.4
La specie *1* è definita come:

$$1[E] = \begin{cases} \{\emptyset\} & \text{se } E = \emptyset; \\ \emptyset & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La sua funzione generatrice è

$$gen(1; x) = 1$$

Esempio 2.5
La ***specie singoletto*** X è definita come:

$$X[E] = \begin{cases} \{E\} & \text{se } |E| = 1; \\ \emptyset & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La funzione generatrice è

$$gen(X; x) = x$$

Esempio 2.6
Se E è un insieme finito, si dice ***permutazione di*** E ogni biezione da E in se stesso. La specie S delle permutazioni è definita da:

$$S[E] = \text{insieme delle permutazioni di } E.$$

La funzione generatrice della specie S è

$$gen(S; x) = \sum_{k \geq 0} k! \frac{x^k}{k!}.$$

Esempio 2.7
La specie L degli ***ordini lineari*** è definita da:

$$L[E] = \begin{cases} \text{insieme degli ordini lineari su } E & \text{se } E \neq \emptyset; \\ \emptyset & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La funzione generatrice della specie L è:

$$gen(L; x) = \sum_{k \geq 0} k! \frac{x^k}{k!}.$$

Osserviamo che le funzioni generatrici delle specie S ed L coincidono; in altri termini l'insieme $S[E]$ delle permutazioni di un insieme finito E è equipotente all'insieme degli ordini lineari su E.

Definizione 2.4 *(specie equipotenti)*

Due specie M ed N sono dette equipotenti se le loro funzioni generatrici coincidono; in tal caso scriveremo: $M \equiv N$.

Ricordiamo che un isomorfismo, o *trasformazione naturale*[3], tra le specie M ed N è un'applicazione che ad ogni insieme finito E associa una biezione $\tau_E : M[E] \to N[E]$ in modo che per ogni coppia di insiemi E ed F e per ogni biezione $u: E \to F$ risulti commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} M[E] \arrow[r, "\tau_E"] \arrow[d, "M[u]"'] & N[E] \arrow[d, "N[u]"] \\ M[F] \arrow[r, "\tau_F"'] & N[F] \end{tikzcd}$$

cioè $N[u] \circ \tau_E = \tau_F \circ M[u]$. In altri termini due specie M ed N sono isomorfe quando per ogni insieme finito E è possibile definire una biezione naturale tra $M[E]$ ed $N[E]$, cioè una biezione che non dipende da un ordine lineare su E. In generale due specie equipotenti non risultano isomorfe. Ad esempio le specie equipotenti S ed L non sono isomorfe in quanto per definire una qualunque biezione tra $L[E]$ ed $S[E]$ è necessario ordinare gli elementi di E. Se M ed N sono specie isomorfe scriveremo:

$$M = N.$$

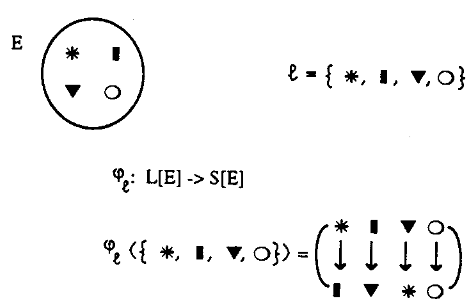


Fig. 2

[3] Nella categoria **B** ogni trasformazione naturale è un isomorfismo funtoriale.

3 Somma e prodotto di specie.

Con la teoria delle specie si ha nella combinatoria enumerativa un mutamento di prospettiva analogo a quello che si ebbe in teoria della probabilità negli anni venti con l'introduzione del concetto di *variabile aleatoria*. In realtà, la teoria delle specie nell'affrontare problemi di carattere enumerativo sposta il punto di vista dall'algebra delle serie formali alla combinatoria degli insiemi. Le operazioni di somma e prodotto tra specie che rendono conto di costruzioni combinatorie sono dunque definite in modo che la funzione generatrice della specie somma sia uguale alla somma delle funzioni generatrici e la funzione generatrice della specie prodotto sia uguale al prodotto delle funzioni generatrici.

Definizione 3.1 *(somma di specie)*

Date due specie M ed N la somma $M + N$ è definita da

$$(M + N)[E] = M[E] \uplus N[E]$$

dove $\uplus$ denota l'operazione di unione disgiunta tra insiemi.

E' immediato provare che $gen(M + N; x) = gen(M; x) + gen(N; x)$. Più in generale:

Definizione 3.2 *(somma di una famiglia sommabile di specie)*

Una famiglia di specie $(M_i)_{i \in I}$ è detta sommabile se per ogni insieme E esiste solo un numero finito di indici $i \in I$ tali che $M_i[E] \neq \emptyset$. In tal caso

$$\left(\sum_{i \in I} M_i\right)[E] = \biguplus_{i \in I} M_i[E].$$

Se $(M_n)_{n \in N}$ è una famiglia sommabile di specie, la corrispondente famiglia di funzioni generatrici è evidentemente sommabile; anche in questo caso la funzione generatrice della somma è la somma delle funzioni generatrici.

La definizione seguente è utile per introdurre il prodotto di specie:

Definizione 3.3 *(composizione di un insieme E in n blocchi)*

Sia E un insieme finito; una composizione di E in n blocchi—o composizione di lunghezza n di E—è una n-upla $(E_1, ..., E_n)$ di sottoinsiemi di E tale che

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i = E \text{ ed } E_i \cap E_j = \emptyset \text{ se } i \neq j$$

La composizione di E nei blocchi $E_1, ..., E_n$ sarà denotata con $E = E_1 + ... + E_n$.

Il numero delle composizioni di E in n blocchi tali che $|E_i| = k_i$ per $i \in \{1,...,n\}$ è, come noto, $\binom{|E|}{k_1,...,k_n} = \frac{|E|!}{k_1!...k_n!}$

Definizione 3.4 *(prodotto di due specie)*

Date due specie qualsiasi M ed N il prodotto MN è definito da

$$(MN)[E] = \biguplus_{E_1+E_2=E} M[E_1] \times N[E_2]$$

dove $\times$ denota il prodotto cartesiano tra insiemi.

In altri termini si ha

$$(MN)[E] = \{(E = E_1 + E_2, s, t) : s \in M[E_1] \wedge t \in N[E_2]\}.$$

Come per la somma, così per il prodotto esiste una relazione diretta tra l'operazione sulle specie e la corrispondente sulle serie.

Proposizione 3.1

Se M ed N sono due specie allora

$$gen(MN; x) = gen(M; x)\, gen(N; x).$$

dim Siano $gen(M; x) = \sum_{k\geq 0} a_k \frac{x^k}{k!}$ e $gen(N; x) = \sum_{k\geq 0} b_k \frac{x^k}{k!}$, E un insieme di cardinalità n, ed $E = E_1 + E_2$ una composizione di E tale che $|E_1| = k$; allora $|M[E_1] \times N[E_2]| = |M[E_1]||N[E_2]| = a_k b_{n-k}$. Quindi

$$|MN[E]| = \left| \biguplus_{E_1+E_2=E} M[E_1] \times N[E_2] \right| =$$

$$= \sum_{E_1+E_2=E} |M[E_1] \times N[E_2]| = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{E_1+E_2=E \\ |E_1|=k}} |M[E_1] \times N[E_2]| =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k} \blacksquare$$

Esempio 3.1

Si voglia calcolare il numero di permutazioni senza punti fissi di un insieme finito. Siano rispettivamente S e S_0 le specie delle permutazioni e delle permutazioni senza punti fissi. Come noto, ogni permutazione su un insieme E

può essere scomposta in cicli di lunghezza almeno due e in punti fissi. Pertanto, ogni permutazione su E è formata da una permutazione senza punti fissi di un sottoinsieme E_1 di E e da un insieme $E_2 = E \setminus E_1$ di punti fissi; viceversa, ogni coppia di questo tipo individua una permutazione. Vale quindi l'identità: $S = S_0 U$, dove U è la specie uniforme. La funzione generatrice della specie S è $gen(S; x) = \sum_{k\geq 0} k! \frac{x^k}{k!} = \frac{1}{1-x}$, quella della specie U è $gen(U; x) = e^x$; dunque la funzione generatrice di S_0 è $gen(S_0; x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$, dal cui sviluppo in serie si ottiene il numero di permutazioni senza punti fissi.

Esempio 3.2

Si consideri una specie M e se ne voglia calcolare il prodotto con la specie *1*; per ogni insieme E vale:

$$(1M)[E] = \biguplus_{E_1+E_2=E} 1[E_1] \times M[E_2] = 1[\emptyset] \times M[E] = \{\emptyset\} \times M[E] = M[E].$$

Quindi la specie *1* risulta, a meno di isomorfismi, l'unità rispetto al prodotto.

La nozione di prodotto tra due specie può essere estesa facilmente al prodotto tra più specie; anche in questo caso la funzione generatrice del prodotto è il prodotto delle funzioni generatrici.

Esempio 3.3

Si vuole calcolare il prodotto della specie singoletto X per se stessa n volte, denotato per brevità con X^n:

$$X^n[E] = \biguplus_{E_1+...+E_n=E} X[E_1] \times \ldots \times X[E_n];$$

tutte le composizioni in cui compare un E_i che non sia un singoletto danno luogo all'insieme vuoto; pertanto se $|E| \neq n$ allora $X^n[E] = \emptyset$. Dunque:

$$X^n[E] = \begin{cases} \emptyset & \text{se } |E| \neq n \\ L[E] & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove $L[E]$ denota l'insieme degli ordini lineari su E.

Esempio 3.4

Sia L la specie degli ordini lineari; allora:

$$L = 1 + X + X^2 + \ldots = \frac{1}{1-X}.$$

Definizione 3.5 *(specie delta)*

Una specie M si dice delta se $M[\emptyset] = \emptyset$.

Se M è una specie delta, la specie $1+M$ coincide con M sugli insiemi non vuoti, ed ha una sola struttura sull'insieme vuoto.

Si osservi che ad una composizione $E = E_1 + \ldots + E_n$ può essere associata la funzione $f: E \to \{1, \ldots, n\}$ tale che $f(x) = j$ se e solo se $x \in E_j$, e viceversa. Ogni funzione $f: E \to \{1, \ldots, n\}$ determina la composizione $E = f^{-1}(1) + \ldots + f^{-1}(n)$.

Definizione 3.6 *(partizione)*

Dato un insieme non vuoto E, una partizione π di E è una famiglia di sottoinsiemi non vuoti e disgiunti di E tale che $\bigcup_{B \in \pi} B = E$.

Si osservi che le partizioni di un insieme si differenziano dalle composizioni in quanto una partizione non è un insieme ordinato e non ha blocchi vuoti.

Definizione 3.7 *(nucleo di una funzione)*

Dati due insiemi E ed S e una funzione $f: E \to S$, si dice nucleo di f il quoziente di E rispetto alla relazione $F = \{(x, y) \in E \times E \mid f(x) = f(y)\}$ indotta da f su E. Gli elementi del nucleo vengono detti fibre della funzione.

Data una funzione $f: E \to S$ e fissato un ordinamento su S, l'ordinamento indotto sul nucleo determina univocamente una composizione su E di lunghezza $|S|$.

Si consideri la specie $(1+M)^n$, con M specie delta:

$$(1+M)^n[E] = \biguplus_{E_1 + \ldots + E_n = E} (1+M)[E_1] \times \ldots \times (1+M)[E_n].$$

Una $(1+M)^n$-struttura si ottiene quindi considerando una composizione di E in n blocchi e costruendo su ognuno di essi una M-struttura; ciò equivale ad 'arricchire' il nucleo di una funzione $f: E \to \{1, \ldots, n\}$ con una $M+1$ struttura; più in generale è possibile introdurre la seguente nozione:

Definizione 3.8 *(specie delle funzioni M-arricchite a valori in S)*

Data una specie delta M e due insiemi finiti E ed S, una funzione M-arricchita da E in S, è una funzione $f: E \to S$, sulle cui fibre è assegnata una $1+M$-struttura. La specie delle funzioni M-arricchite a valori in S, denotata con $(1+M)^S$ è la specie che associa ad ogni E l'insieme delle funzioni M-arricchite da E in S.

In altri termini per ogni funzione $f: E \to S$ si considera la partizione in fibre indotta su E e su ogni suo blocco si costruisce una $1+M$-struttura:

ogni $(1+M)^S$-struttura si deve pensare come una coppia *funzione-nucleo arricchito.*

Se l'insieme S è ordinato, allora le specie $(1+M)^S$ e $(1+M)^{|S|}$ sono isomorfe $(1+M)^S = (1+M)^{|S|}$, altrimenti le due specie sono equipotenti $(1+M)^S \equiv (1+M)^{|S|}$.

Esempio 3.5

Sia S un insieme finito; osserviamo che $U^S[E]$ è l'insieme delle funzioni da E in S. Poichè la specie U^S è equipotente alla specie $U^{|S|}$, si ha: $gen(U^S, x) = gen(U^{|S|}, x)$ da cui l'identità:

$$|S|^{|E|} = \sum_{k_1 + \ldots + k_{|S|} = |E|} \binom{|E|}{k_1 + \ldots + k_{|S|}}.$$

Esempio 3.6

La specie $(1+X)^n$ rappresenta le funzioni X-arricchite a valori in $[n] = \{0, \ldots, n-1\}$, cioè le funzioni monomorfe (o iniettive) a valori in $[n]$. La funzione generatrice è

$$gen((1+X)^n; x) = (gen(1+X; x))^n = (gen(1; x) + gen(X; x))^n = (1+x)^n.$$

Sviluppando in serie si ottiene:

$$gen((1+X)^n; x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{x^k}{k!}.$$

Esempio 3.7

Si voglia calcolare il numero di disposizioni su $[n]$, cioè il numero di funzioni $f: E \to [n]$ arricchite con ordini lineari. La specie L degli ordini lineari è della forma $1 + L_\Delta$, con L_Δ specie delta. Per risolvere il problema posto è sufficiente valutare la funzione generatrice della specie $(1 + L_\Delta)^n$:

$$gen((1+L_\Delta)^n; x) = (gen(1+L_\Delta; x))^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)^n = \sum_{k \geq 0} \left\langle {n \atop k} \right\rangle x^k =$$

$$= \sum_{k \geq 0} n(n+1) \ldots (n+k-1) \frac{x^k}{k!},$$

dove $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ denota il coefficiente *di Comtet*, uguale al numero di multinsiemi di k elementi costruibili su insiemi di n elementi.

4 La composizione di specie.

Ogni funzione generatrice può essere composta con un'altra che abbia termine costante nullo. Le nozioni introdotte nel seguito permetteranno di definire la *composizione* $R(M)$ di due specie R ed M di cui M delta, in modo tale che si abbia: $gen(R(M);x) = gen(R;gen(M;x))$.

Definizione 4.1 *(assemblea)*

Sia M una specie delta. Una assemblea di tipo M (o M-assemblea) su un insieme E non vuoto è una coppia $\langle\pi;T\rangle$, dove π è una partizione di E e T è una funzione che associa ad ogni $B \in \pi$ una M-struttura su B. L'unica M-assemblea costruibile sull'insieme vuoto è l'insieme vuoto stesso.

La specie delle M-assemblee, denotata con $\exp(M)$, associa ad ogni insieme E in $ob(\mathbf{B})$ l'insieme di tutte le assemblee di tipo M su E.

Si noti che la specie $\exp(M)$ in ogni caso non è una specie delta, poichè $\exp(M)[\emptyset] = \{\emptyset\} = 1$.

Esempio 4.1

Una foresta è un'assemblea di alberi.

La specie delle X-assemblee è la specie uniforme U (infatti per ogni insieme E, l'unica X-assemblea si ottiene considerando la partizione in singoletti).

Ogni permutazione è un'assemblea di permutazioni circolari: cioè $\exp(C) = S$. Se $|E| = n$ si ha $|C[E]| = (n-1)!$; pertanto

$$gen(C;x) = \sum_{k\geq 1}(k-1)!\frac{x^k}{k!} = \sum_{k\geq 0}\frac{x^k}{k} = log\frac{1}{1-x}.$$

Si osservi che $e^{gen(C;x)} = gen(S;x)$, relazione valida in generale, come sarà provato successivamente, tra la funzione generatrice di una specie M e quella della specie delle M-assemblee.

Detta U_{tronc} la specie:

$$U_{tronc}[E] = \begin{cases} \emptyset & \text{se } E = \emptyset; \\ U[E] & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove U è la specie uniforme, è possibile verificare che l'insieme delle U_{tronc}-assemblee coincide con l'insieme delle partizioni.

Definizione 4.2 *(potenze divise)*

Data una specie delta M ed un intero positivo n, l' n-esima potenza divisa di M, $\gamma_n(M)$, è la specie che associa ad ogni insieme finito E l'insieme di tutte le M-assemblee su E costruite su partizioni di cardinalità n.

Si osservi che, in base alla definizione precedente, la specie delle M-assemblee è la somma di tutte le potenze divise; cioè

$$\exp(M) = \sum_{n\geq 0}\gamma_n(M).$$

<u>Proposizione 4.1</u>

Vale la seguente relazione:

$$gen(\gamma_n(M),x) = \frac{gen(M,x)^n}{n!}.$$

<u>*dim*</u> Dalla definizione di prodotto e dal fatto che M è una specie delta si ottiene:

$$M^n[E] = \biguplus_{\substack{E_1+\ldots+E_n \\ E_i\neq\emptyset (i=1,\ldots,n)}} M[E_1]\times\ldots\times M[E_n].$$

Poiché ogni partizione π di E in n blocchi ammette $n!$ ordinamenti si ha:

$$gen(\gamma_n(M);x) = \frac{gen(M^n;x)}{n!} = \frac{gen(M;x)^n}{n!}\blacksquare$$

Come conseguenza immediata si ottiene il seguente:

<u>Corollario 4.2</u>

Per ogni specie M vale:

$$gen(\exp(M);x) = e^{gen(M;x)}.$$

Esempio 4.2

Ogni albero con radice (o *arborescenza*) può essere visto come una coppia (r,t), dove r è la radice e t è un'assemblea di alberi con radice (vedi figura 3).

Dal momento che la specie A delle arborescenze è una specie delta otteniamo:

$$A = X\exp(A);$$

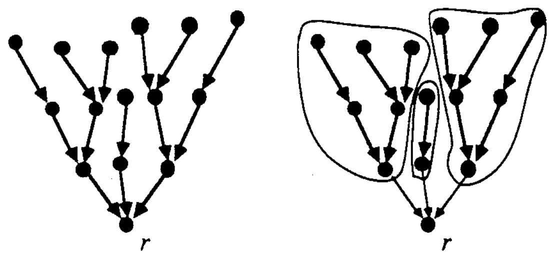


Fig. 3

da cui la seguente relazione tra le funzioni generatrici:

$$gen(A;x) = xe^{gen(A;x)}.$$

Esempio 4.3

Data una specie delta M, ed un insieme finito S, la specie delle ***funzioni M-riluttanti a valori in S***—in simboli $\exp(M)^S$—è la specie delle funzioni a valori in S arricchite di M-assemblee. Una funzione da E in S induce una partizione di E; ogni blocco di essa viene arricchito con una M-assemblea. La funzione generatrice è:

$$gen(\exp(M)^S;x) = e^{|S|gen(M;x)}.$$

Se M è la specie singoletto X allora $\exp(X)^S = U^S$ è la specie delle funzioni a valori in S [MR 70].

Esempio 4.4

Si vuole calcolare il numero B_n (numero di Bell) di relazioni di equivalenza su un insieme di cardinalità n. E' noto che ogni relazione di equivalenza su un insieme S definisce una partizione di S e viceversa; pertanto per risolvere il problema è sufficiente calcolare la funzione generatrice della specie Π delle partizioni. Osservando che una partizione è una assemblea di insiemi non vuoti si ottiene (esempio 4.1):

$$gen(\Pi;x) = e^{gen(U_t;x)} = e^{e^x-1} = \sum_{k\geq 0} B_k \frac{x^k}{k!}.$$

Grazie alle precedenti definizioni, è possibile ora introdurre il concetto di composizione funzionale di specie:

Definizione 4.3 *(composizione funzionale di specie)*

*Data una specie qualsiasi R ed una specie delta M, la **composizione funzionale** di R ed M è la specie $R(M)$ definita da:*

$$R(M)[E] = \{(r,\alpha) : \alpha \in \exp(M)[E] \wedge r \in R[\alpha]\}.$$

In altre parole $R(M)[E]$ è l'insieme di tutte le R-strutture costruite sulle M-assemblee su E.

Esempio 4.5

Se G è la specie dei grafi, la specie i cui elementi sono grafi di strutture M—con M specie delta—è la specie $G(M)$. La specie i cui elementi sono un insieme di arborescenze con una permutazione circolare sulle radici è la specie $C(A)$ delle foreste C-arricchite.

Esempio 4.6

Sia P la specie degli insiemi parzialmente ordinati e Q quella degli insiemi quasi ordinati[4]. Vale l'uguaglianza tra specie:

$$Q(X) = P(U_{tronc}) = P(\exp(X) - 1).$$

<u>Proposizione 4.3</u>

Date due specie R ed M con M delta, si ha:

$$gen(R(M);x) = gen(R; gen(M;x)).$$

<u>*dim*</u> Per ogni $n \geq 0$, sia $R_n[E] = \begin{cases} R[E] & \text{se } |E| = n \\ \emptyset & \text{altrimenti;} \end{cases}$

allora si ha:

$$R(M) = \sum_{n\geq 0} R_n(M).$$

Detto r_n il numero di oggetti ottenuti applicando R ad insiemi di cardinalità n, poiché ogni $R_n(M)$-struttura è una assemblea di n membri munita di una R-struttura, si ha:

$$gen(R_n(M);x) = r_n gen(\gamma_n(M);x) = r_n \frac{gen(M;x)^n}{n!}$$

[4] Un insieme si dice *quasi ordinato* se è munito di un *preordine*, cioè di una relazione $\preceq$ riflessiva e transitiva. In modo canonico da un preordine su E si ottiene una relazione di equivalenza $\simeq \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle x,y\rangle \mid x \preceq y \wedge y \preceq x\}$ su E e la relazione $\leq$ indotta da $\preceq$ sul quoziente è un ordine parziale.

da cui

$$gen(R(M);x) = \sum_{k\geq 0} r_k \frac{gen(M;x)^k}{k!} = gen(R;gen(M;x))\blacksquare$$

Gli ultimi passaggi si fondano sulle seguenti osservazioni. La famiglia infinita di specie $(R_n(M))_{n\in N}$ è sommabile perché su ogni insieme E si possono costruire partizioni con al più $|E|$ parti, e perciò per ogni E solo le prime $|E|$ specie della famiglia sono tali che $R_n(M)[E] \neq \emptyset$. Dunque risulta sommabile anche la corrispondente famiglia di serie di Hurwitz, e la funzione generatrice della somma coincide con la somma delle funzioni generatrici.

Definizione 4.4 *(alberi R-arricchiti con radice)*

Una arborescenza R-arricchita è una arborescenza in cui ad ogni vertice è associata una R struttura sui suoi successori immediati—in particolare alle foglie è associato un elemento di $R[\emptyset]$. La specie delle arborescenze R-arricchite viene denotata con A_R, ed è—come A—una specie delta.

Esempio 4.7

Ogni arborescenza R-arricchita si compone di un elemento $r \in E$, la radice, e da una A_R-assemblea su $E \setminus \{r\}$. Quindi vale l'equazione tra specie:

$$A_R = XR(A_R).$$

Come caso particolare le arborescenze U-arricchite coincidono con le arborescenze, quindi $A = A_U$ e l'equazione precedente si riduce alla nota equazione dell'esempio 4.2:

$$A = XU(A) = X\exp(X)(A) = X\exp(A).$$

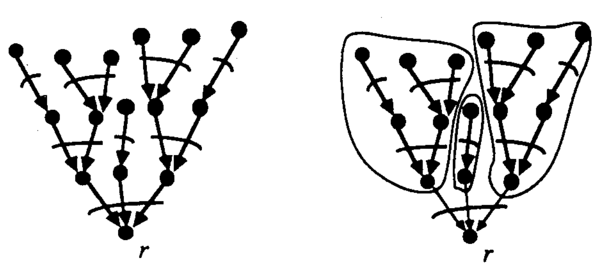


Fig. 4

Esempio 4.8

Per risolvere il problema delle parentesizzazioni di Schroeder, si osserva che ogni parentesizzazione è un albero con radice in cui ad ogni nodo è associato un ordine lineare sui successori immediati. Perciò la specie delle parentesizzazioni di Schroeder è la specie A_L degli alberi L-arricchiti. Poiché

$$L = \frac{1}{1-X}$$

l'equazione dell'esempio precedente diviene

$$A_L = XL(A_L) = X\frac{1}{1-A_L}$$

da cui $A_L(1-A_L) = X$ ed infine vale l'equazione di Schroeder per le parentesizzazioni:

$$A_L = A_L^2 + X.$$

Esempio 4.9

Sia R una specie qualsiasi e X la specie singoletto; è immediato verificare $R(X) = R$.

Sarà ora introdotta la specie delle endofunzioni, e se ne esamineranno i legami con altre specie studiate in precedenza.

Definizione 4.5 *(specie delle endofunzioni)*

La specie D delle endofunzioni è definita da:

$$D[E] = \{f \mid f \text{ è una funzione da } E \text{ in } E\}.$$

La funzione generatrice della specie D è:

$$gen(D;x) = 1 + \sum_{k\geq 1} k^k \frac{x^k}{k!}.$$

Definizione 4.6 *(endofunzioni coniugate)*

*Date due endofunzioni φ e ψ su uno stesso insieme E, diciamo che φ e ψ sono **coniugate** se esiste una permutazione σ di E tale che $\varphi = \sigma\psi\sigma^{-1}$. Un punto $x \in E$ si dice **transiente** per la endofunzione φ su E se per ogni intero $n > 1$ risulta $\varphi^n(x) \neq x$; un punto x non transiente è detto **periodico**; un punto x è **fisso** se $\varphi(x) = x$. Un **ciclo** di una endofunzione φ su E è una successione*

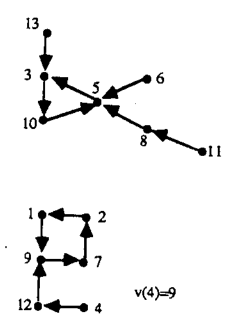
$$x, \varphi(x), \ldots, \varphi^n(x)$$

di punti di E tale che $\varphi^k(x) \neq x$ per $0 < k < n$ e $\varphi^n(x) = x$.

Definizione 4.7 *(grafo di una endofunzione)*

Il grafo orientato di una endofunzione φ su un insieme E, è il grafo che ha come vertici gli elementi di E e come lati le coppie $(x, \varphi(x))$ con $x \in E$.

Poiché consideriamo solo insiemi finiti, almeno un punto della successione $x, \varphi(x), \varphi(\varphi(x)), \ldots$ è periodico. Il primo di tali punti verrà denotato con $v(x)$; si osservi che tale punto appartiene ad un ciclo della endofunzione. Indicheremo con $\sim_\varphi$ la relazione di equivalenza indotta su E dalla endofunzione v. Le componenti connesse del grafo orientato di φ sono circuiti i cui vertici sono radici di arborescenze. I vertici di ognuna di tali arborescenze costituiscono una classe di equivalenza definita dalla relazione $\sim_\varphi$.



	$\xrightarrow{\varphi}$
1	9
2	1
3	10
4	12
5	3
6	5
7	2
8	5
9	7
10	5
11	8
12	9
13	3

Fig. 5

Pertanto $D = exp(C(A))$ e, essendo $exp(C(X)) = S$ si ha:

$$D = exp(C(A)) = S(A).$$

Esempio 4.10

Un albero con una coppia (t, c) di punti fissati (fig. 6) verrà chiamato ***vertebrato***; i punti t e c saranno rispettivamente detti ***testa*** e ***coda***. I vertici che si trovano sull'unico cammino tra t e c sono detti vertebre e tale cammino è la ***colonna vertebrale*** che costituisce un ordine lineare di vertebre.

Per ogni vertice x del vertebrato denotiamo con $v(x)$ la vertebra più vicina a x. Allora ad ogni vertebra w è collegata l'arborescenza dei vertici x tali che $v(x) = w$. Perciò i vertebrati sono ordini lineari di arborescenze, cioè:

$$V = L(A).$$

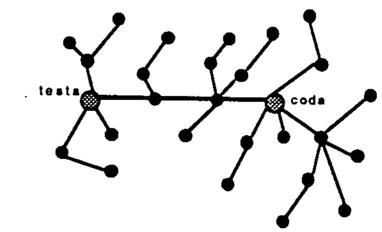


Fig. 6

Poiché le specie L degli ordini lineari ed S delle permutazioni sono equipotenti, si ha:

$$V = L(A) \equiv S(A) = D.$$

Dalla funzione generatrice della specie D si ricava il numero v_k di vertebrati su un insieme di k elementi;

$$v_k = \begin{cases} k^k & \text{se } k > 0 \\ 1 & \text{se } k = 0 \end{cases}$$

Sia a_k il numero di arborescenze su un insieme di k elementi; il numero dei vertebrati su tale insieme è $v_k = ka_k$. Per $k > 0$ si ottiene la nota formula di Cayley:

$$a_k = k^{k-1}.$$

5 Il calcolo differenziale delle specie.

In questa sezione vengono presentati il concetto di derivazione di specie e le sue principali proprietà. Questo permetterà di dare una dimostrazione combinatoria della formula di inversione di Lagrange.

Definizione 5.1 *(derivata di una specie)*

Se M è una specie qualsiasi, la derivata di M è la specie M' definita da

$$M'[E] = M[E \uplus \{*\}]$$

dove '$*$' è un qualsiasi prefissato elemento dell'universo.

Proposizione 5.1

Per ogni specie M vale

$$gen(M';x) = \frac{d}{dx} gen(M;x).$$

Esempio 5.1

Sia L è la specie degli ordini lineari. Una struttura l di $L'[E]$ è un ordine lineare sull'insieme $E \uplus \{*\}$. Indichiamo con E_1 il sottoinsieme di E costituito da tutti gli elementi minori di $*$ nell'ordine l e con E_2 il sottoinsieme di quelli maggiori. Se l_1 e l_2 sono gli ordini lineari indotti da l rispettivamente su E_1 ed E_2, la biezione che ad ogni $l \in L'[E]$ associa l'elemento $(E_1 + E_2 = E, l_1, l_2) \in LL[E]$ definisce un isomorfismo tra L' e LL, cioè:

$$L' = LL.$$

Esempio 5.2

La derivata della specie delle permutazioni circolari è la specie degli ordini lineari.

Per le derivate di specie valgono proprietà formalmente analoghe a quelle delle derivate di funzioni a valori reali, di immediata dimostrazione:

Proposizione 5.2

Siano M ed N due specie qualsiasi, e sia R una specie delta. Valgono le seguenti identità:

- $(M+N)' = M' + N'$
- $(MN)' = M'N + MN'$
- $M(R) = M'(R)R'$

Definizione 5.2 *(specie puntata)*

Data una specie M, la *specie puntata* $M^{\bullet}$ associata ad M è definita per ogni insieme E da:

$$M^{\bullet}[E] = E \times M[E].$$

La seguente proposizione mostra una immediata relazione tra le specie puntate e le derivate di specie.

Proposizione 5.3

Sia X la specie singoletto, allora per ogni specie M si ha:

$$M^{\bullet}(X) = XM'(X).$$

Esempio 5.3

Una *contrazione* è una endofunzione con un solo elemento periodico (che quindi è anche un punto fisso). E' facile verificare che il grafo di una contrazione è una arborescenza con un cappio sulla radice. Pertanto le specie A delle arborescenze e K delle contrazioni risultano essere isomorfe; cioè $A = K$. Si vogliano ora trovare, fissata una specie R, identità che coinvolgono la specie A_R delle arborescenze R-arricchite e la specie K_R delle contrazioni R-arricchite. Da un'arborescenza t si ottiene un'arborescenza R-arricchita definendo per ogni vertice v di t una R-struttura sull'insieme dei figli di v. L'arborescenza R-arricchita è costituita quindi dalla radice e da un'assemblea di arborescenze R-arricchite le cui radici sono collegate da una R-struttura. Pertanto:

$$A_R = XR(A_R).$$

Data una enfodunzione φ, per ottenere una endofunzione R-arricchita è necessario definire una R-struttura su ogni fibra. Nel caso in cui φ sia una contrazione, i figli di un vertice v del grafo che la rappresenta costituiscono la fibra $\varphi^{-1}(v)$, tranne la fibra della radice che contiene, oltre ai figli, la radice stessa. La contrazione R-arricchita sarà quindi costituita dalla radice r, da un'assemblea di arborescenze R-arricchite su $E \setminus \{r\}$ e da una R-struttura sull'insieme delle radici. Pertanto:

$$K_R = XR'(A_R).$$

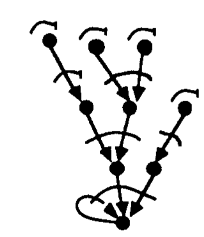


Fig. 7

E' inoltre facile convincersi che le endofunzioni R-arricchite sono permutazioni di contrazioni R-arricchite (si veda la figura 8):

$$S(K_R) = D_R.$$

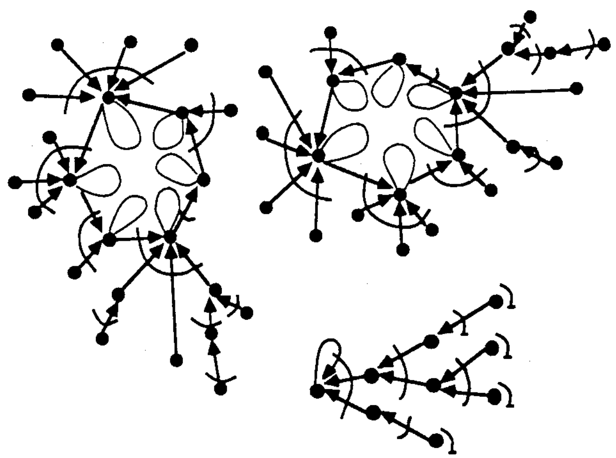


Fig. 8

Esempio 5.4

Dato un grafo, un suo vertice si dice *pari* se il numero di lati incidenti è pari; il grafo è detto *pari* se ogni suo vertice è pari. E' facile verificare che il numero di vertici non pari in un generico grafo è sempre pari. Pertanto da ogni grafo è possibile ottenere un grafo pari aggiungendo un vertice '$*$' e connettendo tale vertice con ogni vertice non pari. Si può quindi concludere che ogni grafo costruito su un insieme E di vertici corrisponde ad un grafo pari costituito sull'insieme $E \cup \{*\}$, cioè la specie dei grafi è la derivata della specie dei grafi pari.

Esempio 5.5

Un grafo è *doppiamente connesso* se per ogni coppia (a, b) di vertici e per ogni lato l, esiste un cammino di estremi a e b che non passa per l. Sia G la specie dei grafi, G_c quella dei grafi connessi e G_{cc} quella dei grafi doppiamente connessi. E' immediato verificare che ogni grafo è una assemblea di grafi connessi, cioè $G = \exp(G_c)$.

Si considerino ora le corrispondenti specie puntate.

Sia g un grafo connesso puntato. Indichiamo con H la componente doppiamente connessa contenente la radice di g e con ϵ l'endofunzione che ad ogni vertice v di g associa il vertice di H "più vicino" a v. Il grafo g può allora vedersi come un'assemblea di $X \exp(G_c^\bullet)$-strutture su ogni fibra di ϵ e una $G_{cc}^\bullet$-struttura

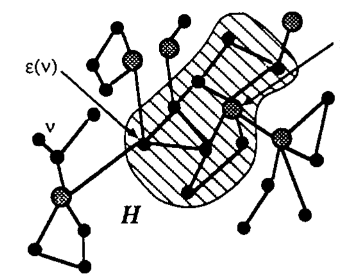


Fig. 9

sull'insieme delle fibre. Dunque (fig. 9):

$$G_c^\bullet = G_{cc}^\bullet\,(X \exp(G_c^\bullet)) .$$

6 La formula di inversione di Lagrange.

Assegnata una serie formale di potenze

$$r(x) = r_1 x + r_2 x^2 + \ldots \quad \text{con } r_1 \neq 0 .$$

esiste un'unica serie formale di potenze

$$v(x) = v_1 x + v_2 x^2 + \ldots \quad \text{con } v_1 \neq 0$$

tale che si abbia

$$r(v(x)) = v(r(x)) = x.$$

La *formula di inversione di Lagrange*:

$$(*) \qquad c_n = \frac{1}{n} \times \text{ coefficiente di } x^{n-1} \text{ in } g'(x) r(x)^n$$

dà il coefficiente c_n del termine di grado n di $g(v(x))$ dove g è una funzione arbitraria di $v(x)$, e $v(x)$ soddisfa l'equazione:

$$v(x) = x r(v(x)),$$

in altri termini $v(x)$ è l'inversa della serie $\frac{x}{r(x)}$.

Una dimostrazione della $(*)$ si basa sulle proprietà del *residuo* di serie di Laurent. Le serie di Laurent

$$f(x) = a_{-n} \frac{1}{x^n} + a_{-n+1} \frac{1}{x^{n-1}} + \ldots + a_{-1} \frac{1}{x} + a_0 + a_1 x + \ldots$$

costituiscono il campo dei quozienti dell'anello delle serie formali di potenze. Osserviamo esplicitamente che in una serie di Laurent è finito il numero dei coefficienti di grado negativo.

Si dice *residuo di una serie di Laurent* il coefficiente del termine di grado -1. Il residuo di $\mathrm{Res}(f(x))$ della serie $f(x)$ verifica proprietà analoghe a quelle dell'integrale, infatti si ha:

1) $\mathrm{Res}\,(f(v(t))v'(t)) = \mathrm{Res}\,(f(x))$
2) $\mathrm{Res}\,(f'(x)) = 0$
3) $\mathrm{Res}\,(f(x)g'(x)) = -\mathrm{Res}\,(f'(x)g(x))$. Per dimostrare la $(*)$ basta osservare che $c_n = \mathrm{Res}\left(\frac{f(v(x))}{x^{n+1}}\right)$ ed effettuando il cambiamento di parametro $x = \frac{t}{r(t)}$ si ottiene:

$$c_n = \mathrm{Res}\left(\frac{f\left(v\left(\frac{t}{r(t)}\right)\right)}{\left(\frac{t}{r(t)}\right)^{n+1}}\left(\frac{t}{r(t)}\right)'\right) =$$

$$= \mathrm{Res}\left(f(t)\left(\frac{t}{r(t)}\right)^{-n-1}\left(\frac{t}{r(t)}\right)'\right) =$$

$$= \mathrm{Res}\left(f'(t)\,\frac{1}{n}\left(\frac{r(t)}{t}\right)^{n}\right) = \frac{1}{n}\mathrm{Res}\left(\frac{f'(t)\,r^n(t)}{t^n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n} \times \text{ coefficiente di } t^{n-1} \text{ in } f'(t)\,r^n(t).$$

6.1 *Dimostrazione combinatoria della formula di inversione di Lagrange*

Teorema *(Inversione di Lagrange)*

Siano R ed F due specie e sia A_R la specie delle arborescenze R-arricchite. Per ogni $n \geq 1$ si ha:

$$F(A_R)[[n]] \equiv F'R^n[[n-1]].$$

dim Dall'equazione $A_R = XR(A_R)$, derivando e ricordando che per la specie K_R delle contrazioni R-arricchite vale l'equazione $K_R = XR'(A_R)$, si ottiene:

$$A'_R = R(A_R) + XR'(A_R)A'_R = R(A_R) + K_RA'_R = \tag{1}$$

$$= R(A_R) + K_R(R(A_R) + K_RA'_R)$$

iterando la sostituzione $A'_R = R(A_R) + K_RA'_R$, si ha:

$$A'_R = R(A_R)\left(1 + K_R + K_R^2 + \ldots\right) = R(A_R)\,\frac{1}{1-K_R}$$

Per quanto visto $\frac{1}{1-K_R} = L(K_R) \equiv S(K_R) = D_R$, quindi $A'_R \equiv R(A_R)D_R$, e

$$\left(F(A_R)\right)' = F'(A_R)\,A'_R \equiv F'(A_R)\,R(A_R)\,D_R$$

Per concludere la dimostrazione è sufficiente provare il seguente lemma della suddivisione, dovuto a G. Labelle [La 82]:

Lemma 6.1 *(della suddivisione)*

Sia G una specie qualunque. Una struttura di specie $G(A_R)D_R$ su un insieme E è equivalente ad una composizione $E = E_1 + E_2$ in cui il primo blocco E_1 è munito di una G-struttura γ e il secondo blocco E_2 è munito di una funzione R-arricchita $\lambda\colon E_2 \to E$.

dim Una struttura di specie $G(A_R)D_R$ su E è costituita da una $G(A_R)$-struttura g su F_1 e da una D_R-struttura f su F_2, con $F_1+F_2 = E$. La struttura g è una foresta di arborescenze R- arricchita il cui insieme di radici E_1 è munito di una G-struttura γ. Detto $E_2 = E \setminus E_1$, la foresta di arborescenze forma insieme alla endofunzione f la funzione R-arricchita $\lambda\colon E_2 \to E$.

Viceversa una composizione $E_1 + E_2 = E$ con una G-struttura γ su E_1 ed una funzione R-arricchita $\lambda\colon E_2 \to E$ si ottiene F_1 come E_1 unito all'insieme dei punti di E che λ definitivamente trasforma in punti di E_1, ed F_2 è $E \setminus F_1$ (si veda la figura 10). ■

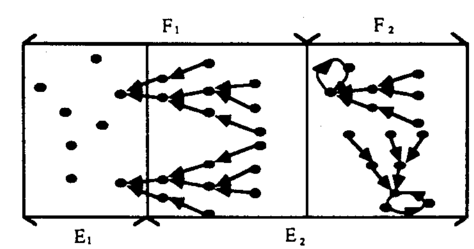


Fig. 10

Per calcolare la cardinalità di $(G(A_R)D_R)[n]$ si noti che nel caso in cui E è l'ordinale n, le funzioni R-arricchite di E_2 in E coincidono con le funzioni R-arricchite di E_2 in n, e quindi

$$(G(A_R)D_R)[n] = (GR^n)[n]$$

Riprendendo le precedenti eguaglianze si ottiene:

$$F(A_R)[[n]] = (F(A_R))'[[n-1]] \equiv F'(A_R)R(A_R)D_R[[n-1]] =$$

$$= F'(A_R)R(A_R)D_R[[n-1]] = (F'R)(A_R)D_R[[n-1]] \equiv$$

per il lemma visto

$$\equiv (F'R)R^{n-1}[[n-1]] = F'R^n[[n-1]] \blacksquare$$

7 Bibliografia.

[Co 74] Comtet L. "*Advances combinatorics*" Reidel, Dordrecht-Holland, Boston 1974.

[Eh 65] Ehresmann "*Categories et structures*" Dunod, Paris 1965.

[GJ 83] Goulden I., Jackson M. "*Combinatorial enumeration*" John Wiley & Sons, 1983.

[Jo 81] Joyal A. "*Une théorie combinatoire des séries formelles*" Advances in Mathematics, 1981.

[La 82] Labelle G. "*Une nouvelle démostration combinatoire des formules d'inversions de Lagrange*" Advances in Mathematics, 1982.

[ML 77] Mac Lane S. "*Categorie nella pratica matematica*" Boringhieri, Torino 1977.

[MR 70] Mullin R., Rota G.C. "*On the foundations of Combinatoria Theory: III. Theory of Binomial Enumeration*" Graph Theory and its Applications (B. Harris ed.) Academic Press, New York 1970.

[St 78] Stanley R.P. "*Generating functions*" MAA Studies in Combinatorics (G.C. Rota, ed.), Mathematical Association of America, 1978.