**Università degli Studi di Firenze**

FACOLTÀ DI LETTERE E FILOSOFIA
Corso di Laurea Triennale (ex 270) in Filosofia


Tesi di Laurea in Logica

# La *Pure Logic* di W. S. Jevons. Un confronto con il sistema di G. Boole.


Relatore:
**Prof. Pierluigi Minari**

Candidato:
**Rossella Marrano**



**Anno Accademico 2009-2010**

# Indice

# Introduzione

Uno dei contributi più fecondi e ricchi di applicazioni della storia della logica dell'Ottocento è rappresentato dall'algebra booleana, sistema logico alla base della progettazione e del funzionamento dei circuiti elettronici e di cui si avvalgono i calcolatori per interpretare ed eseguire le istruzioni dei programmi. L'algebra booleana, com'è noto, prende il nome dal suo primo ispiratore, l'inglese George Boole (1815-64) che ha il merito di aver inaugurato un intero filone di ricerche sull'algebra della logica.

La cosiddetta "rivoluzione booleana" consiste nell'affermare la natura *formale* del calcolo in generale: un calcolo logico è una costruzione formale — comprendente simboli, operazioni e leggi — cui l'interpretazione si aggiunge successivamente; Boole ha presentato per la prima volta questa intuizione nel suo scritto del 1847:

> Coloro che hanno familiarità con lo stato attuale della teoria dell'algebra simbolica, sono consapevoli che la validità dei procedimenti dell'analisi non dipende dall'interpretazione dei simboli che vi sono impiegati, ma soltanto dalle leggi che regolano la loro combinazione. Ogni sistema di interpretazione che non modifichi la verità delle relazioni che si suppone esistano tra tali simboli è ugualmente ammissibile.[1]

Il calcolo presentato da Boole è suscettibile di una duplice interpretazione: aritmetica, valida per l'aritmetica binaria, e logica, valida sia per il calcolo delle classi che per quello delle proposizioni.

Come si è detto, a partire da questa riflessione si è sviluppata una corrente di ricerca sull'algebra logica: il sistema di Boole è stato sottoposto ad una cospicua opera di revisione e modifica da parte degli studiosi successivi, culminata verso la fine del XIX secolo e gli inizi del XX in una presentazione sistematica della materia, la moderna algebra booleana, più avanzata rispetto al sistema originario. Questo processo è iniziato con Boole ancora in vita, nel 1864, anno di pubblicazione dello scritto *Pure Logic* di un logico britannico, William S. Jevons (1835-82).

[1] [3], p. 3

Gli scritti di Boole negli anni successivi alla pubblicazione di *The Laws of Thought* non avevano avuto grande risonanza; lo stesso Jevons sembrava esserne consapevole, infatti scriveva nel 1870:

> Ho spesso deplorato il fatto che sebbene questi lavori siano stati pubblicati negli anni 1847 e 1854, gli attuali manuali ed anche i trattati di logica più estesi siano rimasti del tutto impermeabili ad essi.
>
> [...]
>
> Questa infelice dimenticanza è in parte dovuta alla grande novità delle concezioni di Boole, che impedisce loro di adattarsi facilmente alle dottrine logiche correnti. Essa è dovuta anche alla forma oscura, difficoltosa e, in molti punti importanti, erronea in cui Boole ha presentato il suo sistema.[2]

Jevons è stato il primo a confrontarsi in maniera sistematica con il lavoro di Boole, intuendo la portata di quella che sarebbe poi stata definita "rivoluzione booleana". L'autore ha percepito che l'intuizione di Boole era destinata a segnare una svolta nella storia della logica; una svolta non più trascurabile. Per questo motivo ha proposto un sistema fondato su quello di Boole, con l'esplicita intenzione di migliorarne alcuni aspetti, correggere "errori" che ancora impedivano, secondo l'autore, alla logica booleana di diventare la logica del pensiero comune. Degli scritti di Jevons ci sono state diverse riedizioni, mentre tra quelli di Boole solo *The Laws of Thought* è stato ristampato nel 1916, prima dei tempi recenti. Questo ha contribuito a creare un fenomeno di 'sovrapposizione' delle correzioni sul sistema originale, come sottolinea Grattan-Guinness:

> Gradualmente la versione di Jevons del sistema di Boole è stata preferita a quella di Boole stesso.[3]

Questo aspetto mostra l'interesse storico di uno studio attento e puntuale dell'opera di Jevons. L'obiettivo di questo lavoro è proprio quello di analizzare il suo apporto all'interno del processo di revisione suddetto, con particolare attenzione alle proposte di modifica del sistema di Boole.

La ricerca, di cui questo lavoro è la sintesi finale, è stata condotta a partire da un'attenta lettura delle fonti. I testi principali di riferimento sono stati *The Laws of Thought* di Boole e *Pure Logic* di Jevons (ed anche altri scritti dei due autori che hanno permesso di conoscere meglio i rispettivi sistemi logici). Fondamentale per questo lavoro è stato, inoltre, lo studio delle lettere che i due si sono scambiati. L'esistenza di una corrispondenza tra Jevons e Boole è nota da tempo, essa è anche stata in parte pubblicata

[2][12], p. 170.

[3][8], p. 62

nel 1913; nonostante ciò non è inclusa nell'edizione delle lettere e scritti di Jevons del 1981.[4] I testi delle lettere sono stati trascritti in un saggio di I. Grattan-Guinness, *The correspondence between G. Boole and S. Jevons, 1863-64 (La corrispondenza tra G.Boole e S.Jevons, 1863-1864)*, contenuto nel dodicesimo volume di *History and Philosophy of Logic* (1991).

Questo lavoro si articola in tre capitoli, ne esponiamo brevemente contenuto e finalità. Il primo capitolo sarà dedicato alla presentazione dell'autore, tramite una breve biografia ed un resoconto della sua produzione scientifica; inoltre verrà descritta l'opera oggetto di studio, *Pure logic*, illustrandone struttura e intento. Ci si soffermerà poi sui rapporti tra Jevons e Boole, sottolineando il legame esistente tra le rispettive ricerche nell'ambito della logica e descrivendo i contatti epistolari tra i due. Nel secondo capitolo si presenterà il sistema logico di Jevons, così come è stato teorizzato in *Pure logic*, affiancato da alcuni esempi che permettano di conoscere il funzionamento 'concreto' del metodo d'inferenza, condizione indispensabile per la comprensione dell'intero lavoro. Il terzo capitolo conterrà un confronto tra i due sistemi logici, volto a sottolineare analogie e differenze nella scelta della notazione, delle operazioni, delle leggi e dei metodi d'inferenza. All'interno di questo discorso saranno inserite e commentate criticamente le quattro obiezioni che Jevons muove nei confronti del sistema del collega. La conclusione del lavoro sarà un resoconto dei risultati ottenuti dall'analisi svolta nei capitoli, tesa ad evidenziare gli aspetti più fecondi e coerenti del lavoro di Jevons che sono poi risultati 'vincenti', e le modifiche che invece non hanno avuto seguito.

## Avvertenze

Per brevità nel corso del lavoro adotteremo le seguenti abbreviazioni:

**MAL=** G. Boole, *The Mathematical Analysis of Logic. Being an essay towards a Calculus of Deductive Reasoning*, edizione MacMillan and Co. del 1847.

**LT=** G. Boole, *An Investigation of the Laws of Thought, on which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities.* I numeri di pagina non si riferiscono all'edizione originale del 1854, ma all'eBook rilasciato il 16 February 2005 nell'ambito del Progetto Gutenberg.

**PL=** W.S. Jevons, *Pure Logic or the Logic of Quality apart from Quantity: with remarks on Boole's system and on the relation of logic and mathematics*, edizione Stanford del 1864, digitalizzata da Google e reperibile su Google Libri.

[4] *Papers and Correspondence of William Stanley Jevons*, ed. 1981

# Capitolo 1

# William S. Jevons

William S. Jevons è stato un economista e logico britannico che con i suoi vivaci studi interdisciplinari ha prefigurato diversi sviluppi del secolo successivo. La sua fama è legata principalmente all'economia politica: è considerato uno dei fondatori dell'economia neoclassica e della rivoluzione marginalista; il suo pensiero ha avuto una notevole influenza sullo sviluppo del metodo empirico, egli infatti è stato tra i primi a proporre l'uso della statistica e della econometria nelle scienze sociali.

Per quanto riguarda la filosofia, Jevons aderì all'utilitarismo. Come logico formulò una teoria generale dell'induzione basata sul principio della sostituzione degli identici [*substitution of similars*]; il suo merito in questo campo è quello di aver apportato alcuni miglioramenti al sistema logico sviluppato da George Boole ed esposto nelle due opere principali: *A mathematical analysis of logic (Analisi matematica della logica)* del 1847 e *The laws of thought (Le leggi del pensiero)* del 1854.

In questo capitolo si cercherà di delineare un profilo dell'autore e delle sue opere principali, con particolare riferimento ai suoi studi di logica e allo scritto *Pure Logic or the Logic of Quality apart from Quantity* considerato un efficace compendio del suo sistema logico. Nell'ultima parte si farà riferimento, inoltre, ai contatti tra Jevons e Boole.

## 1.1 Biografia, interessi, opere

William Stanley Jevons nacque a Liverpool il 1° settembre 1835. Nel 1851 divenne uno studente dell'University College School di Londra. Studiò chimica, i suoi maestri furono Graham e Williamson, due pionieri nello sviluppo della teoria atomica. L'interesse per questa disciplina non scemò nel corso della sua vita, lo dimostrano alcuni articoli pubblicati tra il 1870 e il 1878 sul moto browniano. All'University College seguì le lezioni di Augustus De Morgan (1806-1871) sulla matematica e sulla logica, fondamentali per lo sviluppo del suo sistema. S'interessò inoltre di botanica e di economia politica. Jevons lasciò l'University College senza diplomarsi e nel 1854 andò a Melbourne per diventare assaggiatore presso la zecca australiana. Continuò a dedicare molto tempo agli studi scientifici ed elaborò un progetto riguardante le scienze umane che implicava un approccio unitario ed interdisciplinare ai differenti aspetti della vita individuale e sociale. Il suo lavoro copre aree eterogenee: dalla politica ferroviaria alla meteorologia, dalla geologia alla politica sanitaria. Un altro studio in questo ambito è la sua analisi sulla divisione del lavoro tesa a comprendere come dall'interazione tra diversi tipi di occupazioni sorga il meccanismo industriale della società.

Jevons lasciò l'Australia nel 1859 e tornò allo University College a Londra per completare la sua formazione. Si laureò nel 1862. Fu professore di logica e filosofia morale nell'Università di Manchester dal 1863 al 1875 e di economia politica in quella di Londra dal 1876 al 1881. I primi anni sessanta furono molto importanti per il suo percorso intellettuale, egli stesso riporta nel suo diario un cenno alle decisive intuizioni di quel periodo: raggiunse una vera comprensione del concetto di "valore" e sviluppò la teoria della "sostituzione dei simili", centrale per lo sviluppo della sua logica. Nel 1863 fu pubblicato un suo saggio avente come tema il valore dell'oro, e per la prima volta Jevons fu riconosciuto come economista politico. La sua opera più importante in questo campo è del 1871: *The Theory of Political Economy (La teoria dell'economia politica)*; notevole è anche *Money and the Mechanism of exchange* del 1875. Per quanto riguarda la logica e l'epistemologia ricordiamo: *Pure Logic, or the logic of quality apart from quantity: with remarks on Boole's system and on the relation of logic and mathematics (Logica pura,ovvero la logica della qualità indipendentemente dalla quantità, con osservazioni sul sistema di Boole e sul rapporto tra logica e matematica)* del 1864; *The substitution of similars, the true principle of reasoning, derived from a modification of Aristotle's* dictum *(La sostituzione degli identici, il vero principio del ragionamento, derivato da una modifica del* dictum *di Aristotele)* del 1869.

Nel 1869 Jevons costruì una macchina logica, che presentò alla Royal Society nel 1870 con un testo *On the mechanical performance of logical inference (Sull'esecuzione meccanica dell'inferenza logica)*. L'opera epistemologica e metodologica più importante è *The Principles of Science: A Treatise on Logic and Scientific Method (I principi della scienza. Trattato di logica e metodo scientifico)* pubblicata in due volumi nel 1874 e ristampata tre anni dopo in un unico volume.

Jevons morì nel 1882, all'età di 47 anni.

## 1.2 Pure Logic

*Pure Logic*, comparso 10 anni dopo la pubblicazione di *The laws of thought*, è il primo scritto in cui Jevons lavora sul sistema booleano. Durante la stesura Jevons è stato in contatto epistolare con Boole, ed ha avuto la possibilità di sottoporgli parti del suo lavoro. Il testo, agile e scorrevole, pubblicato nel 1864, è stato ristampato più volte ed usato negli anni successivi come testo base in molti corsi di logica.

### 1.2.1 Struttura dell'opera

*Pure Logic* è un breve saggio composto da 15 capitoli. All'introduzione, che contiene una presentazione del lavoro, seguono due capitoli in cui l'autore presenta le basi dell'intero sistema logico: i termini e le proposizioni. In queste prime pagine viene anche descritta la notazione utilizzata nel corso dell'opera.

Jevons introduce poi le leggi che governano le inferenze dirette e le operazioni consentite sui termini. Nei capitoli successivi l'autore si sofferma sui termini plurali, sulle leggi a cui questi obbediscono e sui termini negativi.

Ampio spazio è dedicato alla descrizione del metodo indiretto di inferenza, accompagnata da una dettagliata ed esplicativa serie di esempi. Segue un capitolo in cui Jevons si sofferma sulla relazione tra il suo sistema logico e la logica comune.

I due capitoli finali sono dedicati al confronto con il sistema di Boole: nel primo dei due Jevons propone la soluzione di un articolato esempio tratto da *The laws of thought*, in maniera tale da rendere evidente il confronto e mostrare la potenza e la semplicità del suo metodo comparato con quello booleano. Nell'ultimo capitolo, che si distacca dal resto dello scritto in maniera marcata, anche grazie alla scelta dell'autore di una diversa impaginazione, Jevons propone una critica sistematica del sistema di Boole articolata in quattro principali obiezioni. La scelta dell'autore di esplicitare le obiezioni viene così difesa:

> Io preferirei di gran lunga proporre tranquillamente la mia visione e lasciare agli altri il compito di giudicare quale sia vera. Ma è molto più difficile comprendere la relazione e l'esatta somiglianza o differenza fra due sistemi che comprenderli entrambi separatamente, e, dunque, io credo che la mia pubblicazione debba contenere un confronto fra il suo sistema e quello da me proposto.[1]

Al confronto segue, infine, una riflessione conclusiva sulla relazione tra logica e matematica; altri accenni a questo argomento sono presenti nei capitoli centrali del testo.

[1] [7], p. 30.

### 1.2.2 Intento dell'opera

Lo scopo del lavoro di Jevons, come egli stesso scrive nell'introduzione all'opera, è mostrare i vantaggi di un approccio esclusivamente qualitativo alla logica, come suggerisce il sottotitolo dell'opera: *Pure Logic, or the logic of quality.* La tesi che l'autore sostiene è la seguente: evitando riferimenti alla quantità si otterrebbe un maggior grado di generalità, precisione e semplicità. Per comprendere questa intenzione è necessario fare riferimento alla distinzione tipica della logica tra *intensione* ed *estensione* di un termine: l'intensione (o comprensione, profondità [*depth*]) corrisponde alle qualità, circostanze o attributi connotati dal termine; mentre l'estensione (o larghezza [*breadth*]) è formata dal complesso degli individui denotati da esso.

Jevons ricorda come intensione ed estensione siano legate da una proporzionalità inversa: se le qualità connotanti un termine aumentano, in genere, diminuiscono gli individui che esso denota. L'autore sostiene la necessità di una separazione dei due aspetti: egli definisce una proposizione come un giudizio di uguaglianza o differenza tra il significato di termini, considerati o nell'intensione o nell'estensione. In un sistema semplice si deve considerare solo una dimensione del significato. Naturalmente, nonostante la separazione, i due giudizi non sono indipendenti l'uno dall'altro. Giudizi e ragionamenti nell'altra dimensione possono, e devono, essere implicati.

Jevons ritiene che il sistema di ragionamento primario e più generale sia quello dato dalla comparazione di cose sotto l'aspetto della *qualità*, poiché questo permette di evidenziare i punti d'identità o differenza tra esse. Un sistema che aspiri ad essere perfetto dovrebbe comprendere tutti i ragionamenti concepibili, per questo motivo Jevons basa il suo sistema sulla legge d'uguaglianza e differenza.

> È strano che la forma meramente qualitativa dell proposizioni, la quale è la più chiara forma di affermazione, ed è forse la più diffusa, nelle scienze e nel pensiero ordinario, sia stata totalmente ignorata dai logici, almeno nella fondazione di un sistema.
>
> "I logici, fino ai nostri giorni" dice il prof. De Morgan (Syllabus p.61) "hanno considerato l'estensione di un termine come l'unico oggetto della logica, sotto il nome di *intero logico* [*logical whole*]: l'intensione è stata da loro chiamata *intero metafisico* [*metaphysical whole*] ed è stata esclusa dalla logica."[2]

*Pure Logic* è lo scritto attraverso il quale Jevons vuole mostrare che tutti i processi della logica ordinaria possono essere compresi in un sistema fondato esclusivamente sulla comparazione di qualità, senza nessun riferimento ad un sistema di logica dell'estensione. A questo proposito Geymonat[3] fa notare

[2] PL, p. 55.
[3] [14], p.127.

come, nonostante Jevons ribadisca a più riprese il carattere intensionale del sistema, tutto il suo calcolo sia esprimibile ed interpretabile estensionalmente in termini di classi.

## 1.3 Relazione con il sistema di Boole, contatti tra i due autori

Il sistema che Jevons propone è, per sua stessa ammissione, fondato su quello di Boole e rappresenta un contributo fondamentale alla sistemazione del calcolo booleano. In particolare è stato ottenuto spogliando il sistema di Boole della sua veste matematica, considerata da Jevons inessenziale. L'autore si propone di eliminare le "troppo ardite analogie con la matematica, e di fare dell'algebra della logica una logica pura" che corrisponda alla "logica del pensiero comune". Si può, così, anticipare uno snodo centrale del confronto tra Jevons e Boole: il rapporto tra logica e matematica.

Questa è solo una delle obiezioni che l'autore solleva, le altre riguardano ulteriori aspetti controversi del calcolo booleano: la limitazione relativa all'operazione $+$, che può aver luogo solo tra classi disgiunte; la presenza di operazioni inverse, come la divisione, e di passaggi non interpretabili; l'introduzione di coefficienti numerici diversi da 0 e 1 e di simboli di classe come $v$.

Alcune di queste obiezioni sono oggetto di lettere inviate a Boole tra il 1863 e il 1864. Dalle lettere si evince che Jevons propose modifiche radicali al sistema del collega. Pur non essendo state accettate da Boole, queste innovazioni sono poi invalse successivamente ed accettate da tutti gli studiosi impegnati nell'opera di 'revisione' del sistema booleano. Perciò è importante approfondire questo passaggio: perché l'algebra booleana, così come è conosciuta oggi, risente dell'interpretazione proposta da Jevons dell'algebra logica di Boole.

Gli scambi epistolari ebbero luogo tra l'agosto del 1863 e gli inizi del 1864. Jevons allora aveva appena completato la sua formazione accademica ed era poco meno che trentenne; mentre Boole, che aveva 48 anni, era un noto e rispettato professore di matematica presso il *Queen's College* di Cork, con alle spalle, oltre a numerosi articoli e lavori, le sue due principali pubblicazioni sulla logica. Le obiezioni di Jevons sono rivolte al sistema di Boole così come era stato presentato in LT, ma si possono considerare come rivolte al sistema di Boole *tout court* in quanto, sebbene l'autore avesse apportato alcune modifiche al suo sistema tra un'opera e l'altra, esso era rimasto sostanzialmente immutato nelle basi.

Jevons può essere considerato il primo ad aver proposto una revisione del sistema contenuto nell'opera di Boole, inserendosi però appieno nella scia da lui inaugurata, consapevole di quanto le intuizioni di Boole fossero feconde e significative e dell'originalità della sua concezione:

> La logica dopo il suo lavoro sta alla logica prima del suo lavoro come la matematica con equazioni di qualsiasi grado sta alla matematica con equazioni di primo o secondo grado. Egli ha generalizzato la logica tanto che è diventato possibile ottenere qualsiasi inferenza vera [*true*] da premesse di qualsiasi grado e complessità.[4]

Anche nelle lettere Jevons non nasconde l'ammirazione e l'interesse per il sistema di logica del destinatario, interesse che, aggiunge, dovrebbero avere tutti i veri studenti di logica. In una lettera scrive:

> È dal conflitto di opinioni che la verità deve venir fuori. Ma devo dirle che ho una forte antipatia per le controversie, ed un'assoluta ripugnanza per gli attacchi rivolti, in maniera giustificata o meno, a qualsiasi parte di lavori che io ammiro fortemente come il suo, dai quali ho imparato molto e tratto la maggior parte delle mie concezioni. Ed io so quanto sia difficile combinare la fiducia nelle mie concezioni con il rispetto che è dovuto, e che io nutro pienamente, per lavori come il suo. È solo dopo tale chiarimento che posso sentirmi più tranquillo riguardo al tono delle mie lettere precedenti e posso pubblicare con sollievo rilievi sul suo sistema.[5]

Quando ci furono i primi contatti tra i due, nell'agosto del 1863, Jevons stava completando il suo libro ed allegò alla sua prima lettera alcune pagine dell'ultimo capitolo, chiedendo a Boole un parere. Boole in quel periodo era occupato nella preparazione di una riedizione del suo testo sulle equazioni differenziali, per questo motivo le sue lettere sono sporadiche e spesso telegrafiche nei commenti (8 delle 13 lettere di cui consta la corrispondenza sono di Jevons). Sempre a causa degli impegni pare che non abbia letto la copia del libro che Jevons gli aveva spedito nel mese di novembre del 1863. Nonostante ciò, egli confronta la posizione di Jevons, così com'era espressa nelle lettere, con la sua ed è chiaro nel ribadire le sue convinzioni, rifiutando le proposte di modifica.

Boole non aveva abbandonato la logica; proprio nelle lettere, infatti, esplicita la sua intenzione di pubblicare un nuovo scritto su questo tema che rendesse il suo sistema più facile e popolare. Anche per questo motivo egli comunica a Jevons che non avrebbe letto il suo libro: ritiene che sia necessario lavorare indipendentemente per evitare l'insorgere di qualsiasi questione sull'originalità delle concezioni. Jevons non cela il rammarico legato all'impossibilità di ricevere i pareri tanto attesi e in una lettera del novembre 1863 ribadisce la necessità di un confronto continuo tra le opinioni in vista del progredire della verità. Questa lettera non sarà mai spedita, al suo posto

[4] PL, p. 87.
[5] [7], p. 30.

Jevons ne invia una dai toni decisamente più pacati, a cui Boole risponde il 30 gennaio del 1864.

La corrispondenza s'interrompe undici mesi dopo, nel dicembre del 1864, data della morte improvvisa di Boole.

# Capitolo 2

# Il sistema logico presentato in Pure Logic

Lo scopo di questo capitolo è descrivere il sistema di logica proposto da Jevons nel testo del 1864, *Pure logic*.

## 2.1 Termini e proposizioni

Nel primo capitolo è stata descritta l'idea di base della logica di Jevons: la logica pura sorge da un confronto tra le qualità delle cose. Nel linguaggio comune ci si riferisce ad esse tramite segni, nomi o termini. Questi vengono considerati da Jevons le "maniglie" [*handles*] grazie alle quali la mente afferra e mantiene i suoi pensieri sulle cose; dunque la logica, che si occupa dei nomi, ed in particolare dell'identità o differenza fra i loro significati, tratta indirettamente dell'identità o differenza fra le cose.

Il significato principale di un termine, secondo Jevons, è l'intensione; vale a dire una data serie di qualità, attributi, proprietà o circostanze. Tra le qualità di una cosa si deve annoverare tutto ciò che può essere detto — affermato o negato — su di essa, e poiché esiste un numero infinito di proposizioni possibili, le qualità che possono predicarsi di una data cosa sono infinite. L'autore esclude esplicitamente ogni riferimento all'estensione, o alla quantità di individui denotati, usando la parola *termine* per indicare un nome o una combinazione di nomi che descrivono le *qualità* di una cosa.

La generalità di questo approccio sta nella possibilità di usare un termine per esprimere una combinazione qualsiasi di attributi, e di evidenziare somiglianze e differenze di grado, numero, di spazio e tempo etc. In tal modo un termine può rappresentare le qualità di una cosa o di una persona in tutta la complessità della sua esistenza reale, definendola in maniera tanto dettagliata da individuarla, cioè da fare in modo che non si possa trovare un'altra cosa che sia uguale ad essa in tutti gli attributi. Un termine siffatto costituisce un *termine singolare* [*singular term*] o *nome proprio*. A questo proposito, Jevons rifiuta la definizione di *termine non-connotativo* o *non-descrittivo* come estranea al suo sistema. Il primo a sottolineare la non 'descrittività' dei nomi propri è stato J.S Mill; nella sua visione, i nomi propri, che denotano un singolo individuo, non sono connotativi, cioè non designano un insieme di proprietà:

> [I nomi propri] denotano gli individui che sono da loro designati, ma non indicano o implicano alcun attributo come pertinente a quegli individui.[1]

Secondo Jevons, al contrario, i termini singolari possiedono, per così dire, un *surplus* di connotazione; sono, cioè, più ricchi di qualità rispetto ad altri termini.

Il significato particolare di ciascun termine, in ogni caso, non conta nella logica, che si occupa della relazione tra i significati; l'importante è che un termine mantenga lo stesso significato dall'inizio alla fine di ogni ragionamento. Poiché i termini possiedono un significato determinato e costante, al posto di aggettivi e nomi si possono usare altri segni come le lettere dell'alfabeto. In particolare Jevons propone di usare per ogni termine lettere maiuscole, come $A$, $B$, $C$, $D$, $\ldots$, $U$, $V$.

Questi termini, così come quelli del discorso comune, possono essere noti o no. A partire da questa osservazione, Jevons illustra il compito della logica: mostrare quale relazione di somiglianza o differenza tra i termini possa rendere noti i termini ignoti. Questo suggerisce a Jevons un'analogia con l'algebra, sulla quale ci soffermeremo in seguito.[2]

Esistono anche termini aventi uno tra diversi significati, Jevons li definisce *termini plurali* [*plural terms*]; essi si distinguono dai *termini semplici* [*single terms*], come $A$. Per esempio $B$ o $C$ è un termine plurale, poiché il suo significato è o quello di $B$ o quello di $C$, ma non si sa quale. I singoli termini che esprimono le varie possibilità di un termine plurale vengono chiamati *alternative* [*alternatives*] e devono essere uniti tra loro interponendo il segno $+$.

Importante è sottolineare che il significato di un termine plurale è lo stesso qualunque sia l'ordine delle alternative. $B$ o $C$ ha lo stesso significato di $C$ o $B$, cioè

$$B + C = C + B.$$

Jevons giustifica questa proprietà evidenziando che l'ordine con cui noi pensiamo le qualità di una cosa non altera le qualità stesse, ed inoltre l'ordine non ha nessuna valenza come indicatore su quale significato sia più probabile. I termini plurali obbediscono alle stesse leggi dei termini semplici, inoltre un termine semplice nella forma può essere plurale nel significato; per questi

[1] J.S.Mill, *Sistema di logica raziocinativa e induttiva*, Roma, Ubaldini Editore, 1968, p. 29.

[2] Si veda la sezione 3.5 a pagina 71.

motivi Jevons, dopo averli definiti, non precisa, quando parla di termini, se si tratta di un termine semplice o plurale.

Tra i termini esiste un'ulteriore distinzione: quella tra termini negativi e termini positivi. Il significato di un *termine negativo* [*negative term*] è l'assenza della qualità, o della serie di qualità che formano il significato noto di un certo altro termine, detto *termine positivo.* Così non-$A$ è il termine negativo che indica l'assenza della qualità, o dell'insieme di qualità $A$; vale a dire: se il significato di $A$ è una sola qualità, allora non-$A$ significa la sua assenza, se invece $A$ rappresenta più qualità non-$A$ significa l'assenza di una o più di esse. Jevons precisa che il negativo di un termine negativo è il corrispondente positivo. Cioè non-non-$A$ è $A$.

I due termini corrispondenti ($A$ e non-$A$) vengono anche definiti dall'autore l'uno il *contrario semplice* dell'altro [*simple contraries*]. I termini contrari vengono indicati da Jevons con lettere minuscole, dunque non-$A$ viene espresso scrivendo $a$. $A$ ed $a$ rappresentano una coppia di contrari semplici, e non-$a$ è $A$.

Combinando due termini contrari si ottiene un *termine contraddittorio*, cioè un termine che non ha un significato possibile o pensabile, un termine che non significa alcunché. Per esempio $AaCDe$ è un termine che contiene una collezione di qualità nella quale la stessa qualità ($A$) c'è e non c'è; ed un termine siffatto non può riferirsi a nulla che sia o sarà mai conosciuto.

Dopo aver definito i termini, Jevons definisce le proposizioni:

> Una proposizione è una dichiarazione di uguaglianza o differenza di significato fra due termini, cioè fra le qualità connotate da ciascun termine. Secondo che una proposizione dichiari identità o differenza, è chiamata *affermativa* o *negativa.* Lo scopo di una proposizione è far conoscere il significato di un termine che altrimenti sarebbe ignoto. Una proposizione è vera quando i significati dei suoi termini sono identici o differenti, come essa afferma; altrimenti viene detta falsa. Poiché la logica si occupa delle cose solo attraverso i termini, essa non si accerta se una proposizione sia vera o falsa, ma solo se due o più proposizioni siano o non siano vere insieme, sotto la condizione di significato dei termini.[3].

L'identità di significato dei termini posti ai due lati della proposizione viene espressa con la copula *è* o con il segno $=$ , questa è l'unica relazione presente nel sistema di Jevons.

[3]PL, p. 8.

Le proposizioni negative non vengono considerate in quanto possono essere convertite in proposizioni affermative. Per esempio la proposizione negativa $A$ non$= B$[4] può essere convertita nell'affermativa $A = Ab$.

Sia le proposizioni affermative che quelle negative possono essere *convertite semplicemente*. Le proposizioni $A = B$ e $B = A$ esprimono la stessa cosa: A e B hanno lo stesso significato, sono indistinguibili tra loro se non per il nome.

Poiché lo scopo di una proposizione è rendere noto un termine inizialmente ignoto, le proposizioni identiche, formate da due termini i cui significati sono noti come identici, sono considerate inutili da Jevons. Di questo tipo sono tutte le proposizioni formate predicando un termine di se stesso, come per esempio $A = A$ o $B = B$. Jevons ammette che proposizioni di questo tipo costituiscono la condizione di ogni ragionamento, ma egli aggiunge anche che è una condizione conosciuta a prescindere dalla proposizione che l'afferma.

## 2.2 Operazioni sui termini: combinazione e separazione

Le operazioni della logica pura, secondo Jevons, sono solo due: combinazione e separazione dei termini, o dei loro significati.

La *combinazione* è un'operazione che consiste nell'affiancare due o più termini, i termini uniti avranno come significato la somma dei significati dei singoli termini. Ciascun termine forma con gli altri una *combinazione*, o *termine combinato*.

Questa operazione gode di un'importante proprietà, la commutatività: il significato di una combinazione non cambia al variare dell'ordine dei termini combinati. Dunque:

$$AB = BA,$$

$$ABCD = BACD = DCAB.$$

Infatti l'ordine può riguardare il nostro modo di pensare le cose, ma non le cose stesse, poiché tra le qualità delle cose non esiste un ordine.

Un'altra proprietà messa in evidenza è la distributività: la combinazione di un termine con un termine plurale si ottiene combinandolo con ciascuna delle alternative, poste tra parentesi:

$$A(B + C) = AB + AC.$$

La *separazione* si giustifica facendo riferimento alla Legge degli interi uguali e delle parti: *quando da combinazioni uguali di termini vengono presi gli stessi termini, i termini rimanenti sono uguali.*

[4] $A$ non$= B$ indica una proposizione universale negativa, una disgiunzione tra classi: *Nessun $A$ è $B$.*

Benchè sia auto-evidente, secondo Jevons, questa legge non ha nessuna utilità nella logica pura. Essa è soggetta ad un importante restrizione: si può applicare solo a termini noti; ma premesse considerate *utili* per la logica non contengono solo termini noti, devono contenere almeno una parte di un termine di significato sconosciuto. Questo impedisce di applicare l'operazione, in quanto non si può sapere se il termine sconosciuto contenga tra i significati anche quello del termine che desideriamo rimuovere.

Supponiamo che nell'espressione $AB = AC$ i termini $A$ e $C$ siano noti e $B$ ignoto. In questo caso non sarebbe possibile inferire $B = C$, eliminando $A$, poiché $B$ potrebbe contenere parte dei significati noti di A e quindi sarebbe come non aver rimosso $A$ da un membro della premessa.

## 2.3 Notazione, simboli logici

Può essere utile ricapitolare i simboli logici usati da Jevons:

- $A$, $B$, $C$, $\ldots$: qualità o serie di qualità che costituiscono il significato intensionale dei termini;[5]
- $a$, $b$, $c$, $\ldots$: corrispondenti termini negativi o contrari;
- $A = B$: identità di signifcato tra i termini, vale a dire le qualità significate da A sono identiche a quelle significate da $B$;
- $A + B$: disgiunzione non esclusiva, vale a dire le qualità di $A$ o quelle di $B$, o entrambe;
- $AB$, oppure $A.B$: combinazione, vale a dire la somma delle qualità significate da $A$ e da $B$.

La classe universo e la classe vuota sono presenti nel sistema di Jevons, sebbene non in termini estensionali. Il simbolo 0 viene impiegato per indicare ciò che è contraddittorio, "escluso dal pensiero". Così si ha: $Aa = 0$, $Bb = 0$, e così via. Proposizioni di questo tipo, sottolinea Jevons, sono le premesse tacite di ogni ragionamento. L'autore si sofferma inoltre sulle proprietà del termine 0, esso obbedisce alle leggi dei termini:

$$0.0 = 0$$

$$0 + 0 = 0.$$

Per quanto riguarda l'interazione di 0 con gli altri termini, si ha:

$$A.0 = 0$$

[5] Per un'interpretazione estensionale dei simboli si veda la sezione 3.1 a pagina 30.

$$A + 0 = A$$

$$\text{se } A = 0 + B \text{ allora } A = B.$$

Jevons non utilizza un simbolo particolare per indicare l'universo (come l'1 di Boole), tuttavia ne parla definendolo "universo del pensiero [*Universe of thought*][6], la sfera di un argomento, contenente tutte le affermazioni possibili intorno ad esso.

L'autore, inoltre, non poteva esimersi dall'affrontare la spinosa questione di un simbolo che rappresentasse la parola 'qualche' o 'alcuni' [*some*], "la fonte di tante difficoltà ed errori". Essa viene considerata un termine di significato indefinito, ignoto dal principio alla fine del problema. Il significato, anche in questo caso, è inteso in maniera intensionale: *qualche* viene interpretato come significante un'indefinita e sconosciuta serie di qualità. Gli si può convenientemente attribuire un simbolo, Jevons usa la lettera $U$.

Nessun termine $U$ è da considerarsi uguale a qualsiasi altro termine $U$, in breve $U = U$ non è un'uguaglianza vera, poiché in due premesse diverse non può essere considerato come significante la stessa serie di qualità.

Tuttavia nelle proposizioni universali (**A** ed **E**) è concesso, ed anzi consigliato, eliminare U sostituendolo con l'altro membro della proposizione. Cioè al posto di $A = UB$ si può scrivere $A = AB$ (eliminando intrinsecamente $U$ — si veda più avanti) esprimendo perfettamente la proposizione: le qualità di $A$ sono tra quelle di $B$, ma non necessariamente le esauriscono. Dunque l'espressione delle categoriche classiche nel sistema di Jevons è la seguente:

| | | |
|---|---|---|
| **A** | Ogni A è B | $A = UB$ o $A = AB$ |
| **E** | Nessun A è B | $A = Ub$ o $A = Ab$ |
| **I** | Qualche A è B | $UA = UB$ o $CA = DB$ |
| **O** | Qualche A non è B | $UA = Ub$ o $CA = DB$ |

Per quanto riguarda la notazione, Jevons sottolinea che nei simboli usati non vi è nulla di misterioso, essi sono semplicemente abbreviazioni, modi convenzionali, per indicare un termine del linguaggio ordinario, o un insieme di termini. Per esempio il termine A può indicare un termine come *arancione*. O ancora, il segno $+$ è semplicemente un segno che sostituisce per motivi di chiarezza le congiunzioni *e*, *o*, etc. del linguaggio ordinario. Il segno $=$ è la copula *è*, o equivalenti. Dunque il linguaggio simbolico non contiene nulla che non sia già presente nel linguaggio naturale. Tale precisazione potrebbe apparire essa stessa misteriosa; il riferimento implicito, sarà chiaro più avanti, è alla logica di Boole e a taluni simboli del suo sistema che a Jevons paiono oscuri e lontani dal linguaggio comune.[7]

[6]PL, p. 48.

[7]Cfr. sezione 3.1 a pagina 30.

## 2.4 Leggi principali del sistema

Jevons è sistematico nell'enunciare le leggi del suo sistema, nonostante le dissemini nella sua esposizione. Le leggi vengono introdotte facendo leva sulla loro auto-evidenza e sulla corrispondenza tra il pensiero e le cose:

> La logica procede per leggi, ed è da esse limitata. Poiché la logica deve trattare i nomi così come il pensiero tratta le cose. E le leggi della logica stabiliscono alcune uguaglianze o uniformità nel nostro modo di pensare, e sono vere in maniera auto-evidente.[8]

La prima legge che s'incontra leggendo il testo è la

**Legge di uguaglianza.** Termini che hanno lo stesso significato di uno stesso termine, hanno lo stesso significato tra loro.

Essa viene introdotta facendo esplicito riferimento alla natura del pensiero e delle cose, appare infatti evidente che cose uguali alla stessa cosa sono uguali tra loro. Jevons non manca di sottolineare come questa legge sia analoga al primo assioma di Euclide: le cose che sono equivalenti alla stessa cosa, sono equivalenti tra loro. Vengono dette equivalenti le cose che hanno la stessa grandezza; ma ciò che è vero per questo tipo di uguaglianza, è vero per qualsiasi altro modo di pensare a cose uguali. Dunque, conclude l'autore, la legge geometrica di Euclide non è altro che un caso particolare della legge generale.

Dopo aver descritto la combinazione di termini e la sua proprietà commutativa, Jevons enuncia la

**Legge di semplicità.** Una combinazione di un termine con se stesso ha lo stesso significato del termine da solo.

Così $AA = A$, $AAA = A$, e così via. Inoltre $ABCD = ABCD.BCD = A.BB.CC.DD = ABCD$. Emerge chiaramente l'origine booleana di questa legge, per un confronto si rimanda alla sezione 3.3.

Centrale per il confronto con Boole e legata alla Legge di semplicità è la

**Legge di unità.** Alternative uguali prese insieme hanno lo stesso significato di una qualsiasi di esse presa singolarmente.

Così

$$A + A = A, \qquad A + A + A = A, \qquad A + A + B = A + B.$$

Per inciso, accettare questa legge significa operare una scelta a favore del carattere inclusivo della somma e della totalità di $+$.

Jevons prosegue descrivendo la

[8]PL, p. 10.

**Legge delle parti uguali e degli interi.** Termini uguali combinati con termini uguali danno combinazioni uguali.

Dunque se $A = B$ e $C = D$, allora $AC = BD$. Anche questa legge auto-evidente, sottolinea l'autore, è un caso più generale di un assioma di Euclide, precisamente il secondo: parti uguali fanno interi uguali.

A questa legge ne corrisponde una non principale, ma altrettanto evidente, la

**Legge degli interi uguali e delle parti.** Quando da combinazioni uguali di termini vengono presi gli stessi termini, i termini rimanenti sono uguali.

Di questa legge si è discusso ampiamente parlando dell'operazione di separazione dei termini.[9]

Un'altra legge non principale è la

**Legge di differenza.** Un termine che differisce da un altro termine nel significato differisce da ogni termine che ha lo stesso significato dell'altro.

Cioè se $A \neq B$ e $B = C$, allora $A \neq C$.

I principi della logica tradizionale sono presenti nel sistema di Jevons. La Legge d'identità è considerata la condizione di ogni ragionamento, insieme alla

**Legge di contraddizione.** È nella natura del pensiero e delle cose che una cosa non possa avere e non avere la stessa qualità.

Si può inoltre scorgere una riformulazione del Terzo escluso nella cosiddetta la

**Legge di dualità.** Un termine deve contenere uno ed uno solo dei termini componenti ciascuna coppia di contrari semplici.

In altre parole una cosa o è uguale o differisce da un'altra cosa. Dunque non si modifica il significato di un termine se lo si combina con una coppia di termini contrari semplici considerati come alternative:

$$A = A(B + b) = AB + Ab.$$

Un termine formato da due alternative che differiscono solo per una parte e il suo contrario viene definito *termine duale* [*dual term*]. Per esempio $AB+Ab$ è un termine duale riguardo $B$, $ABC+ABc$ lo è riguardo a $C$, mentre $B+b$ e $C+c$ vengono dette *parti duali* [*dual parts*]. La Legge di dualità ci garantisce anche che eliminando la parte duale non si altera il significato del termine.

Riepiloghiamo le leggi principali, o condizioni della logica:

[9] Cfr. sezione 2.2.

**Condizione o postulato:** Il significato di un termine dev'essere lo stesso lungo qualsiasi porzione di ragionamento; dunque $A = A$, $B = B$ e così via

**Legge di uguaglianza:** $A = B = C$; allora $A = C$

**Legge di semplicità:** $AA = A$, $BBB = B$, e così via

**Legge delle parti uguali e gli interi:** $A = B$; allora $AC = BC$

**Legge di unità:** $A + A = A$, $B + B + B = B$, e così via

**Legge di contraddizione:** $Aa = 0$, $ABb = 0$, e così via

**Legge di dualità:** $A = A(B + b) = AB + Ab$

Queste vengono considerate da Jevons le principali leggi del pensiero, quelle che forniscono le premesse universali del ragionamento, le altre leggi sono corollari di quelle appena elencate. Naturalmente le leggi non possono essere provate, in quanto la nozione di prova le presuppone; esse vanno considerate "le condizioni primarie di tutto il pensiero e di tutta la conoscenza".

## 2.5 Metodi e processi logici

Secondo l'autore, nonostante sia nota sotto vari nomi, esiste un'unica regola d'inferenza ed è la

**Regola di sostituzione degli identici**. Per ogni termine sostituire ciò che in qualche premessa è detto essere identico in significato a quel termine; vale a dire, si può dovunque sostituire $B$ con $A$ se si ha come premessa $A = B$.[10]

Jevons usa due modalità d'inferenza, entrambe basate su quelle booleane: il metodo d'inferenza diretta e quello di inferenza indiretta.

### 2.5.1 Inferenze dirette

L'inferenza diretta è un'applicazione del Principio di sostituzione degli identici a certe premesse per arrivare a conclusioni logiche.

In particolare quando due proposizioni affermative hanno un membro uguale, si possono eguagliare gli altri due membri. Da $A = B$, $B = C$ è possibile formare, grazie alla Legge di uguaglianza la nuova proposizione $A = C$. Una proposizione ottenuta applicando questa legge si dice essere ottenuta tramite inferenza diretta.

[10] Per una discussione più approfondita su questo principio si veda la sezione 3.1.1 a pagina 32.

Le proposizioni dalle quali si inferisce sono dette *premesse*, e vengono prese come basi del ragionamento. Jevons ricorda come la logica non si occupi della verità o falsità delle premesse, ma solo dei nessi fra di esse.[11]

L'inferenza di una nuova proposizione da due premesse si ottiene tramite l'*eliminazione* del membro comune alle premesse. Quando due proposizioni hanno un termine in comune, vengono dette *relate* [*related*]. Premesse di questo tipo formano un sillogismo, infatti a partire da due premesse relate ed un termine noto si possono apprendere i due termini ignoti. Jevons sottolinea come da due premesse sia possibile al massimo eliminare un solo termine, ed inferire una nuova proposizione. Evidenzia, dunque, l'analogia perfetta tra il sistema di proposizioni matematiche o equazioni con termini noti e ignoti e le proposizioni logiche.

Si possono anche ottenere inferenze dirette tramite l'operazione di combinazione:

> Avendo combinato termini uguali con entrambi i membri di una premessa, le combinazioni possono essere dichiarate uguali in una nuova proposizione che sarà vera con la premessa.
>
> Poiché ciò che è vero per termini esplicitamente uguali, come A,A, dev'essere vero anche per termini che si sanno uguali in virtù di una premessa. Così, da $A = B$ possiamo inferire $AC = BC$ combinando $C$ con ciascuno dei termini della premessa.[12]

Poiché il numero di termini che possono essere combinati con i membri di una premessa sono infiniti, da ogni premessa si possono ricavare infinite conclusioni per combinazione.

Ci possono anche essere degli argomenti in cui le premesse contengono termini uguali solo in parte, esse sono da considerarsi comunque relate perché in questi casi è possibile formare dei termini comuni combinando ciascun termine con la parte che è differente. Per esempio, nelle premesse $A = C$ e $B = CD$, i termini $C$ e $CD$ sono parzialmente uguali. S'interviene combinando $D$ con la prima premessa, ottenendo $AD = CD$. La proposizione così ottenuta ha un membro in comune con la seconda premessa, dunque possiamo inferire $AD = B$.

Esiste anche un altro tipo di inferenza diretta, la *sostituzione*: a qualsiasi termine, o parte di termine, in una premessa, si può sostituire la sua espressione in funzione di altri termini. In altre parole, i due membri di una premessa possono essere usati indifferentemente, uno al posto dell'altro, dovunque occorrano. Se si ha: $A = BCD$ e $BC = E$, si può sostituire nella prima premessa a $BC$ la sua espressione E, ottenendo $A = DE$. In questo

[11] Jevons utilizza lo stesso termine, *inference*, sia per indicare il processo d'inferenza che per indicare le proposizioni inferite, cioè le conclusioni.

[12] PL, p. 16.

modo si ottiene lo stesso risultato che si otterrebbe in due passaggi: formando un termine comune (combinando D con entrambi i lati di $BC = E$) e poi eliminandolo.

Un'importante conseguenza del processo di sostituzione è la possibilità di sostituire a qualsiasi parte di un membro della proposizione l'intero dell'altro. Così, in $A = BCD$ possiamo sostituire a uno qualunque tra $B$, $C$, $D$, $BC$, $BD$ e $CD$, parti di $BCD$, l'intero primo membro $A$ inferendo le nuove proposizioni:

$$\begin{array}{lll} A = ACD, & A = ABD, & A = ABC, \\ A = AD, & A = AB, & A = AC. \end{array}$$

La validità di questo processo dipende dalla Legge di semplicità e da quella delle parti e gli interi, come si vede combinando ciascun membro della premessa con se stesso. Così, da $A = BCD$ abbiamo $A.A = BCD.BCD = BCD.D = AD$, unendo i termini uguali e sostituendo l'intero $A$ a $BCD$. Bisogna tener presente che non si può, come regola generale, sostituire a parti di un termine meno dell'intero dell'altro, poiché non possiamo sapere, a partire dalla sola premessa, se la parte del termine rimossa è pienamente sostituita dalla parte scelta dell'altro termine; mentre di sicuro lo è dall'intero.

Il processo appena descritto è definito da Jevons *eliminazione intrinseca* [*intrinsic elimination*], per distinguerlo dal primo processo di eliminazione tra due premesse, *eliminazione estrinseca*. Quest'ultimo potrebbe essere visto come un caso limite di eliminazione intrinseca in cui si sostituisce all'intero di un membro l'intero dell'altro. In una sola premessa l'eliminazione intrinseca di un intero membro darebbe come risultato una proposizione identica, quindi inutile.

In ogni caso, l'eliminazione intrinseca non fornisce una nuova conoscenza, ma viene utilizzata per eliminare termini che non vogliamo compaiano nella conclusione. Jevons ritiene questo processo perfettamente equivalente all'eliminazione descritta da Boole, per un confronto si veda la sezione 3.4.

### 2.5.2 Inferenze indirette

Il carattere peculiare del metodo indiretto, sottolinea Jevons, è la sua capacità di risolvere e spiegare, nella maniera più esaustiva possibile, argomenti di ogni grado di complessità. Secondo l'autore esso fornisce una soluzione completa al problema posto in evidenza da Boole (il problema fondamentale della logica pratica):

> Dato un insieme di premesse che esprimono relazioni fra certi elementi — siano questi elementi, cose o proposizioni — si chiede esplicitamente quale sia la relazione complessiva tra elementi

qualsiasi che ne consegue, in qualsiasi condizione e in qualsiasi forma proposte.[13]

La riformulazione che Jevons propone è identica nella sostanza:

> Dato un numero qualsiasi di proposizioni formate da un numero qualsiasi di termini distinti, si richiede l'espressione di uno qualsiasi di questi termini o di una combinazione qualsiasi in funzione degli altri termini contenuti nelle premesse.[14]

Centrale per le inferenze indirette è il *metodo di sviluppo*: lo sviluppo di un termine consiste nella sua combinazione con una coppia di contrari semplici, come previsto dalla Legge di dualità. Dunque

$$A(B + b) = AB + Ab$$

è lo sviluppo di A rispetto a B o in termini di B. Si può proseguire sviluppando A rispetto a B e C, ottenendo:

$$A = A(B + b)(C + c) = ABC + ABc + AbC + Abc.$$

Preso in se stesso lo sviluppo di un termine non ci dà nuova conoscenza su di esso; ma, se considerato con le premesse di un problema, ci permette di apprendere se alcune alternative dello sviluppo sono contraddittorie e quindi da rifiutare. Le alternative rimanenti formano poi una nuova espressione per il termine. Questo è un caso di inferenza indiretta, poiché a partire dalle premesse si ottiene una nuova espressione per il termine non direttamente, usando la Legge di uguaglianza, ma indirettamente, mostrando cosa il termine non è.

Si consideri un semplice esempio ad una sola premessa: sia $A = B$, si cercano espressioni per $A$, $B$, $a$, $b$ inferite da questa premessa. Si procede sviluppando i termini come segue:

$$\begin{aligned} A &= AB + Ab \\ B &= AB + aB \\ a &= aB + ab \\ b &= Ab + ab \end{aligned}$$

Il passo successivo è esaminare quali delle alternative ($AB$, $aB$, $Ab$, $ab$) contraddicono la premessa $A = B$:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A$ | combinato con $A = B$ | dà | $A = AB$ |
| $B$ | combinato con $A = B$ | dà | $AB = B$ |
| $a$ | combinato con $A = B$ | dà | $Aa = aB = 0$ |
| $b$ | combinato con $A = B$ | dà | $Ab = Bb = 0$ |

[13] LT, p. 5.
[14] [13], p. 144.

Dunque abbiamo appreso che le combinazioni $aB$ e $Ab$ sono contraddittorie e devono essere rifiutate, e che $AB$ non è contraddittoria rispetto alla premessa. Di $ab$ non abbiamo appreso nulla. Eliminando dagli sviluppi le combinazioni contraddittorie, si ha:

$$A = AB + 0 = AB$$
$$B = AB + 0 = AB$$
$$a = 0 + ab = ab$$
$$b = 0 + ab = ab$$

Tra queste ci sono due conclusioni, $A = AB$ e $B = AB$, che avremmo potuto ottenere dalla premessa tramite combinazione; ma abbiamo anche $a = ab$ e $b = ab$ che sarebbe stato impossibile ricavare usando solo l'inferenza diretta. Inoltre eliminando $ab$ si inferisce la nuova conclusione $a = b$. Questo risultato, secondo cui dall'uguaglianza di due termini si può inferire l'uguaglianza dei loro contrari semplici, è evidentemente corretto.

Usando un metodo simile si possono ricavare conclusioni a partire da un numero qualsiasi di premesse, sviluppando ogni termine richiesto rispetto agli altri termini ed eliminando le combinazioni che risultano contraddittorie in ogni premessa.

Il metodo indiretto può, inoltre, essere applicato per ricavare tutte le conclusioni possibili o espressioni a partire da premesse qualsiasi, per quanto siano numerose o complicate. Jevons propone un modo per abbreviare l'intero processo, elencando una serie di regole:

1. SVILUPPO: formare ogni possibile combinazione dei termini inclusi nelle premesse e dei loro contrari.

2. CONFRONTO: combinare ciascuna delle espressioni ottenute con entrambi i membri di una premessa e osservare i risultati. Se la combinazione non forma una contraddizione (cioè non genera alcun termine della forma $Aa$) con *nessuno* dei due membri della premessa viene detta *soggetto incluso* [*included subject*]; se, invece, è contraddittoria con *entrambi* i membri viene detta *soggetto escluso* [*excluded subject*]; se infine la combinazione forma una contraddizione con *un solo* membro della premessa, tale elemento viene detto *combinazione contraddittoria* o *soggetto contraddittorio* [*contradictory combination or subject*] e va eliminato. Un soggetto escluso o un soggetto incluso è un *soggetto possibile* [*possible subject*], un soggetto contraddittorio è un *soggetto impossibile* [*impossible subject*].

3. CONFRONTO RIPETUTO: ripetere lo stesso procedimento con ciascuna delle premesse. Una combinazione è materia inclusa per una serie di premesse se lo è per ogni premessa, cioè per tutte le premesse. Lo stesso vale per le combinazioni escluse e quelle contraddittorie.

4. SELEZIONE: l'espressione per un termine della premessa si forma con tutte le combinazioni incluse ed escluse contenenti quel termine, trattate come alternative.

5. RIDUZIONE: l'espressione ottenuta può essere semplificata riducendo i termini duali ed eliminando intrinsecamente tutti i termini non desiderati nell'espressione.

6. ELIMINAZIONE: se l'espressione di un termine contiene una combinazione che non occorre nell'espressione di nessun contrario di quel termine, possiamo eliminare la parte della combinazione comune al termine e alla sua espressione.

   Questa regola è decisamente poco immediata, Jevons ne dà una giustificazione operativa. Si veda l'esempio seguente.

7. PREMESSE CONTRADDITTORIE: dev'essere rifiutato come contraddittorio o inconsistente ogni sistema di premesse che contraddica totalmente ogni termine.

Può essere conveniente riportare un esempio concreto di applicazione della procedura sopra descritta.

Sia $A = BC$, trovare tutte le possibili conclusioni a partire da questa premessa. Elenchiamo le possibili combinazioni dei termini $A$, $B$, $C$ e dei loro contrari, come suggerito dalla regola 1. (Sviluppo):

$$\begin{gathered} ABC \\ ABc \\ AbC \\ Abc \\ aBC \\ aBc \\ abC \\ abc \end{gathered}$$

Combinando ciascuna di queste con entrambi i membri della premessa $A = BC$ (regola 2.), si ottengono i seguenti risultati:

| | | |
|---|---|---|
| $ABC = ABC$ | $ABC$ | soggetto incluso |
| $ABc = ABCc = 0$ | $ABc$ | contraddizione |
| $AbC = ABCb = 0$ | $AbC$ | contraddizione |
| $Abc = ABCbc = 0$ | $Abc$ | contraddizione |
| $0 = AaBC = aBC$ | $aBC$ | contraddizione |
| $0 = AaBc = aBcC = 0$ | $aBc$ | soggetto escluso |
| $0 = AabC = aBbC = 0$ | $abC$ | soggetto escluso |
| $0 = Aabc = aBbCc = 0$ | $abc$ | soggetto escluso |

Dal confronto risulta che le quattro combinazioni $ABc$, $AbC$, $Abc$, $aBC$ sono da eliminare e solo le altre vanno considerate soggetti possibili.

Supponiamo di volere un'espressione del termine $b$. Selezioniamo, secondo la Regola 3., tra i soggetti possibili le combinazioni contenenti $b$, vale a dire $abC$ e $abc$ e consideriamoli come alternative:

$$b = abC + abc.$$

Questa espressione può essere ridotta applicando la Regola 6: $aC$ compare solo con $b$, nella combinazione $abC$, e non con il suo contrario $B$ (infatti $aBC$ è stata scartata come combinazione contraddittoria); dunque si può applicare la regola eliminando $b$ (la parte comune) da $abC$, ottenendo:

$$b = aC + abc.$$

La validità di questa regola emerge osservando l'espressione per $aC$:

$$aC = aBC + abC = abC,$$

dato che $aBC$ è contraddittorio. Dunque da $b = abC + abc$ si ottiene $b = aC + abc$ per sostituzione. Lo stesso avviene in tutti gli altri casi in cui la regola si applica.

Si sarebbe potuto anche ridurre l'espressione per $b$ tramite la regola 5., come segue:

$$b = abC + abc = ab(C + c) = ab.$$

Nello stesso modo si possono ricavare espressioni per gli altri termini contenuti nella premessa, per i loro contrari o per combinazioni di termini.

### 2.5.3 Esempi e osservazioni

Jevons ritiene che il suo metodo sia in grado di risolvere efficacemente anche i problemi classici della logica. Si consideri un sillogismo in `Felapton`:

| | |
|---|---|
| Nessun A è B | $A = Ub = Ab$ |
| Ogni A è C | $A = UC = AC$ |
| Qualche C è non-B | |

Si può arrivare alla soluzione tramite inferenze dirette: da $A = Ab$ si ottiene per combinazione $AC = AbC$ e da $A = AC$ si ottiene $Ab = AbC$, dunque

$$AC = AbC = Ab$$

e per la Legge di uguaglianza:

$$AC = Ab,$$

che è un'affermazione più precisa di $UC = Ub$ o 'Qualche C è non-B', la conclusione aristotelica.

La stessa conclusione potrebbe essere ottenuta tramite l'inferenza indiretta. Considerando tutte le possibili combinazioni di $A$, $B$, $C$, $a$, $b$, $c$ e confrontandole con le premesse $A = Ab$ e $A = AC$, si ottengono i seguenti rislutati:

| | |
|---|---|
| $ABC$ | contraddizione |
| $ABc$ | contraddizione |
| $AbC$ | soggetto possibile |
| $Abc$ | contraddizione |
| $aBC$ | soggetto possibile |
| $aBc$ | soggetto possibile |
| $abC$ | soggetto possibile |
| $abc$ | soggetto possibile |

Osservando le combinazioni rimanenti si nota che non c'è nessuna relazione diretta tra $B$ e $C$, perché $B$ compare sia con $C$ che con $c$, e lo stesso vale per $C$. Però possiamo esprimere $AC$ e $Ab$ (ricordando la regola 4.):

$$AC = AbC$$

$$Ab = AbC$$

ed inferire da queste, per eliminazione, la stessa conclusione di prima:

$$AC = Ab.$$

Si possono anche dedurre altre conclusioni:

$$\begin{gathered} B = ab, \\ b = AC + abC + abc = AC + ab, \\ C = Ab + aBC + abC = Ab + aC, \\ c = Ab + aBC + abC = Ab + aC, \\ ab = abC + abc = ab. \end{gathered}$$

Nell'ultimo caso non c'è nessuna nuova conclusione.

Questo esempio tratto da *Pure logic* ci permette di fare un'importante osservazione. Jevons sceglie un sillogismo particolare, infatti la consonante `p` nel nome `Felapton` indica che, nel processo di riduzione alla I figura, dev'essere fatta una *conversio per accidens*. Questa operazione non è generalmente valida se non si assume una presupposizione esistenziale, nota come "Assioma di Aristotele" che garantisce la presenza di almeno un elemento in tutte le classi denotate dai termini di una categorica. Ricordiamo che `Felapton` non è valido nel sistema di Boole, nel quale si può giungere alla conclusione solo formulando una premessa supplementare: una restrizione sui termini, in questo caso sul termine $c$. Boole, infatti, non attribuisce portata esistenziale agli enunciati **A** ed **E** e rifiuta l' "Assioma di Aristotele": se si vuole che le proposizioni abbiano portata esistenziale si deve specificare che i loro soggetti si riferiscono a classi non vuote, solo dopo questa precisazione è lecito operare una *conversio per accidens*.

Jevons, come Boole del resto, non affronta esplicitamente la questione della portata esistenziale delle proposizioni. La scelta intensionale non elimina il problema; infatti benché Jevons opti per una prospettiva intensionale, quindi non parli né di classi né di elementi denotati, sappiamo che il risvolto estensionale è ineliminabile. In particolare i termini sono uguali a 0 (intensionalmente: esclusi dal pensiero, estensionalmente: classi vuote) solo se contengono una contraddizione: $Aa = 0$. Il problema è questo: non tutte le classi vuote possono essere connotate come collezioni di qualità contenenti una contraddizione. Infatti ci possono essere classi pensabili, che quindi non sono contraddizioni logiche, che sono vuote in un determinato universo del discorso. Intensionalmente però non sono contraddittorie e quindi possono essere non vuote in qualche altro universo del discorso, sono cioè possibili. In una prospettiva intensionale entra in gioco la modalità.

Non è dunque possibile fare ulteriori ipotesi sulla portata esistenziale delle proposizioni in Jevons. Si può aggiungere che quando egli descrive la conversione delle proposizioni afferma che la conversione semplice del suo sistema comprende sia la *conversio simplex* che la *conversio per accidens* della logica scolastica. Questa affermazione non è affatto chiara. Potrebbe essere spiegata facendo riferimento alla quantificazione del predicato; questa 'scoperta', come si vedrà nella sezione 3.1.1, ha reso le proposizioni simili ad equazioni sempre convertibili.

Un altro esempio eloquente è il seguente: $A = B+C$, in quanto coinvolge una somma. Sviluppo e confronto:

| | |
|---|---|
| $ABC$ | soggetto incluso |
| $ABc$ | soggetto incluso |
| $AbC$ | soggetto incluso |
| $Abc$ | contraddizione |
| $aBC$ | soggetto escluso |
| $aBc$ | soggetto escluso |
| $abC$ | soggetto escluso |
| $abc$ | soggetto escluso |

Da notare che le combinazioni contraddittorie sono quelle che contengono $A$ senza contenere $B$ o $C$, ed anche quelle che contengono $B$ o $C$ senza contenere A. Due conclusioni, tra le altre, meritano attenzione:

$$A = ABC + ABc + AbC = BC + Bc + bC,$$
$$a = abc = bc.$$

Da ciò, emerge chiaramente il carattere inclusivo della somma.

Consideriamo un ulteriore esempio: $AB = CD$, questa premessa apparentemente semplice coinvolge 4 termini, dunque le possibili combinazioni da confrontare con la premessa saranno $2^4 = 16$:

| | |
|---|---|
| $ABCD$ | soggetto incluso |
| $ABCd$ | contraddizione |
| $ABcD$ | contraddizione |
| $ABcd$ | contraddizione |
| $AbCD$ | contraddizione |
| $AbCd$ | soggetto escluso |
| $AbcD$ | soggetto escluso |
| $Abcd$ | soggetto escluso |
| $aBCD$ | contraddizione |
| $aBCd$ | soggetto escluso |
| $aBcD$ | soggetto escluso |
| $aBcd$ | soggetto escluso |
| $abCD$ | contraddizione |
| $abCd$ | soggetto escluso |
| $abcD$ | soggetto escluso |
| $abcd$ | soggetto escluso |

Da ciò possiamo inferire, per esempio:

$$A = ABCD + AbCd + AbcD + Abcd = BCD + AbCd + AbcD + Abcd.$$

Osservando la premessa, si nota che $A$ e $B$ si possono interscambiare senza alterare la premessa stessa, termini di questo tipo vengono definiti da Jevons *uniformemente relati*. Quando due termini sono in questa relazione l'espressione di uno si può ricavare a partire dall'espressione dell'altro interscambiando i termini; dunque si ha:

$$B = ACD + BaCd + BacD + Bacd.$$

Questo semplifica la ricerca, ma il processo rimane macchinoso: si pensi ad un problema con 6 termini, bisognerebbe stilare e confrontare $2^6 = 64$ combinazioni, e poi ripetere questo confronto per ogni premessa. Di questo inconveniente e della proposta di soluzione di Jevons si discuterà oltre.

Concludiamo questo capitolo con altre brevi osservazioni. Quando un termine qualsiasi compare in entrambi i lati della premessa (come $A$ in $AB = AC$), qualsiasi combinazione contenente il suo contrario è un soggetto escluso. Jevons osserva:

> Un soggetto escluso è d'importanza inferiore e spesso di nessuna importanza. Come dice il suo stesso nome, è una combinazione che concerne ciò che non desideriamo conoscere. La sfera di un argomento, o l'*universo del discorso*, contiene tutte le materie

> incluse. Una materia esclusa è come una bugia all'interno di questa sfera. Tuttavia siamo obbligati a considerarla perché la materia esclusa di una premessa può essere la materia inclusa di un'altra.[15]

Di una proposizione identica, il termine che appare in entrambi i lati è l'unica materia inclusa. Tutte le altre combinazioni sono escluse e non ci sono combinazioni contraddittorie. Non è possibile inferire alcunché, l'inutilità di proposizioni di questo tipo è evidente.

[15] PL, p. 48.

# Capitolo 3

# Confronto con il sistema di Boole

> Finché il sistema di logica matematica di Boole è stato capace di dare risultati al di là del potere di qualsiasi altro sistema, è stato una roccaforte inespugnabile.
>
> [. . . ]
>
> Ma se è vero che il sistema dei capitoli precedenti ha la stessa potenza di quello di Boole, le cose cambiano. Ci sono adesso due sistemi di notazione che danno gli stessi risultati formali, uno dei quali li fornisce con forza e significato auto-evidenti, l'altro attraverso processi oscuri e simbolici.[1]

In questo capitolo si riporteranno le obiezioni che Jevons muove nei confronti del sistema di Boole, esplicitate nel XV capitolo di PL. Le obiezioni saranno analizzate all'interno di un discorso più ampio contenente un confronto tra i due sistemi che espliciti differenze e somiglianze nella scelta della notazione, delle operazioni e delle leggi che agiscono sui simboli logici. Si confronteranno inoltre i diversi metodi di inferenza e le concezioni dei due autori circa il rapporto tra logica e matematica.

## 3.1 Notazione

Prima di entrare nel merito del confronto tra i simboli è necessario discutere della loro interpretazione.

Gli autori concordano su una condizione senza la quale ogni ricorso ai segni è inutile: la necessità di un'interpretazione determinata; vale a dire, qualunque sia l'interpretazione, essa deve rimanere fissa dall'inizio alla fine del ragionamento o del problema.

[1]PL, p. 75.

Ciò che caratterizza il sistema di Jevons, come abbiamo già avuto modo di sottolineare, è la prospettiva intensionale che dà anche il titolo all'opera (*Pure logic, or the logic of quality*). Geymonat propone per ogni simbolo la corrispondente interpretazione estensionale, ed è semplice notare come questa prospettiva si avvicini a quella booleana della logica dei termini: si considerino ad esempio i *termini*, che Jevons aveva definito intensionalmente come collezioni di qualità, essi possono essere interpretati, dal punto di vista estensionale, come classi, cioè collezioni di individui. Lo stesso vale per gli altri segni: $A = B$ diventa un modo per esprimere l'identità tra classi, $A+B$ l'unione, $AB$ l'intersezione. Il simbolo 0, che intensionalmente indica "ciò che è escluso dal pensiero", dal punto di vista estensionale rappresenta, come in Boole, la classe vuota.

Permangono differenze nella formalizzazione: Jevons segue il suo maestro De Morgan nell'indicare i termini ed i loro contrari usando la stessa lettera, maiuscola e minuscola. In questo modo i termini vengono espressi *per se*; mentre, ricordiamo, Boole esprime i termini contrari facendo riferimento all'universo: il contrario di $x$ è $1-x$.[2] Boole, inoltre, non cita la legge logica della doppia negazione (che dovrebbe essere espressa come $1-(1-x) = x$); mentre Jevons, come abbiamo già visto, precisa che il negativo di un termine negativo è il corrispondente positivo (non-$a = A$).

Jevons non ha nel suo sistema un equivalente del simbolo 1 per indicare l'universo; in ogni caso, la sua interpretazione dell'universo, come sfera del discorso, si avvicina a quella booleana espressa in LT. Infatti nell'opera del 1854 l'universo è inteso come universo del discorso, che può essere limitato in estensione e può cambiare a seconda del contesto; mentre in MAL l'universo era preso in senso assoluto e considerato come comprendente tutte le classi concepibili di oggetti esistenti o meno. Sebbene Boole non ne faccia menzione, questa è una nozione introdotta da De Morgan nel 1846, nel suo primo lavoro sul sillogismo[3]. In seguito, De Morgan sviluppò ulteriormente questa teoria dell'universo del discorso, e descrisse la possibilità di dividere l'universo U in due parti: una classe e il suo complemento. A questo proposito, in maniera più o meno esplicita, sia Jevons che Boole considerano lo sviluppo dei termini una partizione progressiva dell'universo. Boole esplicita questa intuizione così:

> I costituenti dello sviluppo di una funzione dei simboli logici $x$, $y$, $z$, etc. sono interpretabili e rappresentano le varie partizioni esclusive dell'universo del discorso.[4]

Inoltre propone una semplice dimostrazione di questa proposizione calcolan-

[2] In alcune occasioni, come per esempio nel capitolo XIV di LT, Boole per brevità indica il contrario di $x$, $1-x$, con il simbolo $\overline{x}$.

[3] Cfr. [8], p. 36.

[4] LT, p. 59.

do lo sviluppo della funzione $f(x) = 1$ rispetto ad x:[5]

$$f(x) = \mathbf{1} = f(1)x + f(0)(1-x) = 1x + 1(1-x) = \mathbf{x+(1\text{-}x)}.$$

Analogamente, sviluppando rispetto ad $x$ e $y$, si ottiene:

$$1 = xy + x(1-y) + (1-x)y + (1-x)(1-y),$$

e così via per $n$ termini.

Jevons, sebbene in termini meno rigorosi, esprime un'idea analoga:

> La successiva applicazione della legge di dualità a due, tre, quattro, cinque o più termini origina lo sviluppo di tutte le possibili combinazione logiche, detto l'*alfabeto logico*.[6]

Jevons, così come Boole, individua come unica relazione l'identità, espressa dal simbolo =; tuttavia in entrambi gli autori manca una definizione chiara di questa relazione. In particolare Jevons, che fa dell'identità la base del suo sistema, riconosce l'esistenza di vari gradi di somiglianza, ma non chiarisce ulteriormente.

Per completare l'analisi e il confronto della notazione, bisogna discutere del simbolo che corrisponde alla parola 'qualche' o 'alcuni'.

### 3.1.1 Il termine 'qualche' e la quantificazione del predicato

L'introduzione di un simbolo per indicare la parola 'qualche' è strettamente legata alla questione della 'quantificazione del predicato', teoria elaborata indipendentemente dal filosofo scozzese William Hamilton (1788-1856) e da De Morgan intorno alla metà del XIX secolo. Ricordiamo che la disputa sorta circa la priorità della scoperta, è additata da Boole come una delle ragioni che lo spinse a pubblicare le sue concezioni sulla logica, nel testo del 1847, MAL.

Cerchiamo di spiegare brevemente di che cosa si tratta. Una proposizione, o giudizio, come è noto, consta di un *predicato*, unito ad un *soggetto* tramite una *copula*. Si consideri, per esempio, la proposizione: *Tutti gli uomini sono mortali.* Questa proposizione, in cui solo il soggetto è quantificato, asserisce che *tutti gli uomini* sono mortali, ma non chiarisce, invece, quanti dei mortali siano uomini; può avere, infatti, un duplice significato:

$$\text{Tutti gli U sono M} = \begin{cases} U \equiv M & \text{Tutti gli U sono } \textit{tutti} \text{ gli M} \\ U \subset M & \text{Tutti gli U sono } \textit{alcuni} \text{ M} \end{cases}$$

[5]Ricordiamo che per $f(x)$ s'intende un'espressione algebrica qualunque, che può anche non contenere x. Dunque 1 può considerarsi a tutti gli effetti una funzione di x.

[6][11], p. 90.

In altre parole: una proposizione con soggetto universale può indicare un'identità tra classi (se anche il predicato è preso universalmente) oppure un'inclusione (se il predicato è particolare). La quantificazione del predicato consiste esattamente nel dare qualche indicazione sulla 'quantità' del predicato, in questo caso si dirà: *Tutti gli uomini sono* alcuni *dei mortali.*

La novità è tanto sottile quanto rilevante: la proposizione non stabilisce più un'inclusione tra due classi, avente come caso limite l'identità ($\subseteq$); ma diventa un'*equazione* tra soggetto e predicato ($=$). Il significato di questo cambiamento è chiaro: si stabilisce un punto di contatto tra la logica e la matematica.

Sebbene Boole non faccia esplicito riferimento alla quantificazione del predicato, la assume come punto di partenza della sua intera dottrina: se si considerano le proposizioni della logica come equazioni, tutte le deduzioni della logica tradizionale, e molte altre ancora, possono essere ricavate da esse tramite processi algebrici.

La quantificazione del predicato ha un ruolo centrale anche in Jevons, ed in particolare nella formulazione di ciò che egli definisce "il vero principio del ragionamento": la sostituzione degli identici. Nel titolo del saggio del 1869[7], in cui espone questo principio, Jevons lo presenta come una modifica del *dictum* di Aristotele; si potrebbe aggiungere: una modifica basata sulla quantificazione del predicato.

Il *Dictum de omni et nullo* viene così formulato dai logici della Scolastica:

> Ciò che vale di tutti vale in particolare di ciascuno [*Quiequid de omni valet, valet etiam de quibusdam et singulis*]. Ciò che è falso di tutti è falso in particolare di ciascuno [*Quiequid de nullo valet, nee de quibusdam nee de singulis valet*].

In altre parole: ciò che si predica (affermativamente o meno) di un'intera classe si predica anche di tutto ciò che è contenuto in essa. Come si è detto, la logica aristotelica considera le proposizioni universali affermative come asserenti l'inclusione di un termine (o di una classe) in un altro, ed il suo postulato è coerente con questa concezione.

Il *dictum* tradizionale si applica "dal soggetto al predicato", vale a dire, a partire dalla proposizione *Tutti gli uomini sono mortali*, siamo autorizzati ad applicare a *tutti gli uomini* (cioè ad ogni elemento della classe soggetto *uomini*) qualsiasi proprietà indicata dalla parola *mortali* (ottenendo le varie esemplificazioni: Socrate è mortale, Boole è mortale, Jevons è mortale etc.) perché sappiamo che il soggetto è una sottoclasse del predicato; non possiamo, però, fare il procedimento contrario, commetteremmo, infatti, una fallacia logica se attribuissimo ai *mortali* tutte e sole le proprietà della classe *uomini*.

[7][13].

La quantificazione del predicato ha inaugurato una nuova concezione, un nuovo modo di considerare le proposizioni; pertanto anche il *dictum*, secondo Jevons, dev'essere ripensato.

> I logici moderni hanno modificato la forma delle proposizioni aristoteliche senza operare nessuna modifica corrispondente al *dictum*, il principio auto-evidente che forma il principale postulato del suo sistema. Essi hanno così ottenuto la giusta forma per le proposizioni, ma non il modo corretto per usarla.[8]

Secondo l'autore, una proposizione è un'equazione tra due termini ($A = B$), essi solo formalmente vengono chiamati soggetto e predicato, in quanto, una volta eguagliati, diventano indistinguibili e ciò che è noto di uno dev'essere asserito anche dell'altro. Per poterlo fare è necessario quantificare il predicato, ottenendo:

$$\text{Tutti gli uomini} = \text{alcuni dei mortali.}$$

In sostituzione della copula *sono* si può usare il simbolo = perché in questo caso *sono* non indica più *sono inclusi tra* ma *sono identici a*. Così, conclude Jevons, il *dictum* si può applicare in entrambe le direzioni:

> Ciò che è noto di un termine dev'essere affermato anche dei suoi uguali [*equal*] o equivalenti [*equivalent*].
>
> In altre parole:
>
> Ciò che è vero di una cosa è vero anche dei suoi simili [*its like*].[9]

Questo principio, detto *sostituzione degli identici*, è un processo tipico del ragionamento matematico (sostituzione di un membro di un'equazione con l'altro), ma appare a Jevons un principio su cui si reggono ragionamenti di ogni tipo; esso può essere rappresentato graficamente come segue:

$$\begin{array}{ccccc} a & = & b & & a \\ & & \S & \text{dunque} & \S \\ & & c & & c \end{array}$$

Dove il simbolo ∽ sta ad indicare una relazione qualsiasi (di tipo matematico — cioè tra quantità — e non). Il principio di sostituzione è, infatti, applicabile a qualsiasi tipo di identità: uguaglianze numeriche ma anche identità fra collezioni di qualità.

[8][13], p. 86.
[9]Ivi, p. 90.

> Il significato della parola latina *aequalis* non era ristretto solo ad un'uguaglianza tra quantità, essa era anche applicata a qualsiasi cosa fosse identica ad un'altra. Bisogna interpretare la parola *uguali* [*equal*] nel vecchio e più ampio senso di equivalenti in maniera tale da ottenere la tanto desiderata unione tra ragionamento matematico e ragionamento logico. Non è difficile mostrare che tutte le forme di ragionamento consistono nel ripetuto impiego del processo universale di *sostituzione degli uguali*, o, se si preferisce, *sostituzione degli identici*.[10]

Un discorso simile lo si trova in MAL di Boole:

> È generalmente affermato da tutti gli scrittori di logica che tutti i ragionamenti, in definitiva, dipendono dall'applicazione del *dictum* di Aristotele. "Ciò che si predica universalmente di una classe di cose, può essere predicato nella stessa maniera di ogni cosa compresa in quella classe". Tuttavia è comunemente riconosciuto che esso non è immediatamente applicabile in tutti i casi.
>
> [...]
>
> Un altro modo per considerare la materia è risolvere tutti i ragionamenti applicando uno dei seguenti canoni:
>
> 1. Se due termini concordano [*agree*] con lo stesso termine, concordano tra loro.
> 2. Se un termine concorda e un altro no con lo stesso termine, allora essi non concordano [*disagree*] con l'altro.[11]

Boole, in altre parole, assume come regola generale del calcolo un principio che in MAL definisce "l'unico e sufficiente assioma":

> Operazioni equivalenti compiute su soggetti equivalenti producono risultati equivalenti.[12]

Questo principio è, nelle premesse e nei risultati, molto simile a ciò che Jevons definisce "sostituzione degli identici". Tale discorso permette di capire la grande importanza che ha, nella costruzione di questi sistemi logici, la quantificazione del predicato.

Affinché sia possibile quantificare il predicato è indispensabile includere nel sistema di logica un simbolo che denoti la parola 'qualche' o 'alcuni'; senza la quale molte proposizioni non potrebbero essere espresse come equazioni convertibili. Boole introduce, per questa ragione, la classe V ed il

[10]Ivi, p. 96.
[11][3], p. 18.
[12]Ibidem.

corrispondente simbolo elettivo $v$, che indica una classe indefinita. Dunque la proposizione *Tutti gli uomini* ($x$) *sono alcuni dei mortali* ($y$) è espressa dall'equazione: $x = vy$, cioè *le cose che sono uomini costituiscono un'indefinita selezione tra le cose che sono mortali*, e $v$ è proprio il simbolo di questa classe indefinita.

L'introduzione di questo simbolo rappresenta un'effettiva novità per la logica, ma Jevons ritiene che sia necessario un ulteriore passo avanti: bisogna separare completamente i significati, qualitativo e quantitativo, di tutti i termini logici, inclusa la parola 'qualche'. L'autore propone una lettura qualitativa della proposizione *Gli uomini sono alcuni dei mortali*, esprimendola come: *L'uomo è una specie di mortale* [*man is some kind of mortal*]. 'Qualche' o 'qualche tipo' vengono interpretati come significanti un'indefinita collezione di qualità, come termini di significato ignoto, ed indicati con il simbolo $U$.

Jevons, in definitiva, pur cambiandone l'interpretazione, ripropone un analogo della classe $v$ booleana, che presenta le stesse oscurità quando si parla di importo esistenziale.[13]

### 3.1.2 La restrizione sulla somma

Due delle obiezioni che Jevons rivolge a Boole riguardano la notazione ed i simboli logici; analizziamo la prima:

> I simboli di Boole sono essenzialmente differenti dai nomi o simboli del discorso comune, la sua logica non è la logica del pensiero comune.[14]

Il riferimento è in particolare al simbolo $+$, un'espressione come $a+b$, infatti, nel sistema di Boole non sempre denota una classe ben definita: la somma fra due termini è interpretabile solo se essi non hanno elementi comuni. Questa restrizione si spiega facendo riferimento alla nozione stessa di interpretabilità: considerato un termine $t$, esso è interpretabile se, e solo se, soddisfa la legge indice; vale a dire

$$t \text{ è interpretabile } \Longleftrightarrow t^2 = t.$$

Dunque, dati due termini interpretabili $a$ e $b$, la loro somma $a + b$ sarà interpretabile se, e solo se, $(a + b)^2 = a + b$; in generale, tuttavia, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a + 2ab + b \neq a + b$. Si avrà dunque:

$$(a + b)^2 = a + b \Longleftrightarrow ab = 0.$$

Considerata la prospettiva intensionale, Jevons interpreta questa restrizione come segue:[15]

[13] Cfr 2.3 a pagina 15.

[14] PL, p. 76.

[15] $AB = 0$, estensionalmente indica: le classi $A$ e $B$ sono disgiunte; mentre dal punto di vista intensionale: $A$ e $B$ sono termini contrari.

> Boole usa il simbolo + per unire termini, sotto la condizione che essi siano *contrari logici* che non possono essere predicati delle stesse cose o combinati fra loro senza contraddizione. È questo che io contesto. Nell'uso ordinario di queste congiunzioni non si uniscono necessariamente solo contrari logici.
>
> E se consideriamo termini così uniti come contrari logici è solo in virtù di una tacita premessa; è qualcosa nel significato dei nomi o nella nostra conoscenza di essi ad insegnarci che sono contrari. E quando la nostra conoscenza del significato dei termini congiunti è difettiva, è sovente impossibile decidere se essi siano contrari o no.
>
> Si prenda per esempio la proposizione: *un nobile è o un duca, o un marchese, o un conte, o un visconte, o un barone*. Se venisse espressa coi simboli di Boole implicherebbe che un nobile non possa essere allo stesso tempo un duca e un marchese. Molti nobili posseggono due o più titoli. [...]
>
> Da un attento esame del discorso ordinario, appare chiaro che i significati dei termini uniti da 'e' o 'o' variano da un'identità assoluta fino all'assoluta contrarietà. [16]

Jevons cita numerosi esempi, da Shakespeare a Darwin, per corroborare la sua tesi, che in realtà appare abbastanza ovvia. Boole non avrebbe mai negato la presenza di disgiunzioni inclusive nel linguaggio ordinario, tanto che nel suo calcolo propone un espediente che permette di formulare frasi di questo tipo senza sommare classi con elementi comuni. Consideriamo un esempio tratto da LT: *Gli ammessi sono quelli che sanno l'inglese e quelli che sanno il tedesco*, è chiaro che verrebbe ammesso anche un eventuale bilingue. Assegnando i simboli come segue:

x= gli ammessi

y= coloro che sanno l'inglese

z= coloro che sanno il tedesco,

la frase si può formalizzare: $x = y + z(1 - y)$; cioè: *la classe degli ammessi è formata dall'intera classe di coloro che sanno l'inglese più la classe formata da coloro che sanno il tedesco ma non l'inglese.* In questo modo vengono inclusi coloro che sanno parlare sia tedesco che inglese, ma si rispetta la restrizione sulla somma poiché è evidente che la classe $y$ e la classe $z(1 - y)$ non hanno elementi in comune.

Un modo alternativo, ma equivalente, è: $x = y(1 - z) + z(1 - y) + yz$; anche in questo caso le tre classi sono disgiunte ma esprimono una somma inclusiva.

[16] Ibidem.

Naturalmente in Boole, nonostante ci siano modi di esprimere una somma inclusiva, un'espressione come $x+y$ è equivalente all'espressione $x(1-y)+(1-x)$, dunque è sempre accompagnata dalla restrizione $xy = 0$, che generalmente non compare quando nel linguaggio ordinario si fa uso di una 'e' o di una 'o'. Questa è senz'altro una pecca, tuttavia è con un'altra argomentazione che Jevons coglie il reale nervo scoperto di questa restrizione:

> La materia di un'espressione, non la forma, indica se i termini sono esclusivi. E se v'è un punto su cui i logici concordano è il seguente: la logica è formale e non mostra alcuna considerazione verso qualsiasi cosa non espressa formalmente.[17]

L'accusa è quella di "consultare la materia", e la cosa è inaccettabile in un processo di 'formalizzazione'.

Consideriamo altri due esempi tratti da LT:

- *I beni (x) consistono di cose trasferibili (y), disponibili in quantità limitate (u), e tali da produrre piacere (z) o evitare il dolore (w).* L'equazione corrispondente è:

  $$x = yu[\underbrace{z + w(1 - z)}_{\text{somma inclusiva}}] \text{ oppure } x = yu[z(1 - w) + w(1 - z) + wz].$$

  Boole giustifica la sua scelta:

  > È chiaro dalla natura della materia, che l'espressione *tali da produrre piacere o evitare il dolore* nella definizione precedente è equivalente a *tali da produrre piacere, o, se non producono piacere, tali da evitare il dolore.*[18]

- *Gli esseri responsabili (x) sono tutti gli esseri razionali (y) che sono liberi di agire (z) o che volontariamente hanno sacrificato la loro libertà (w).* L'equazione corrispondente è:

  $$x = y(z + w) \text{ oppure } x = y[\underbrace{z(1 - w) + w(1 - z)}_{\text{somma esclusiva}}].$$

  Anche in questo caso Boole spiega perché ha scelto questa formalizzazione:

  > Nell'esprimere questa definizione, io assumerò che che le due alternative, vale a dire: *esseri razionali liberi di agire* e *esseri razionali la cui libera volontà di agire è stata sacrificata volontariamente*, siano mutualmente esclusive, cioè non esistono individui che si trovano in entrambe le classi. Questo permette di interpretare la proposizione letteralmente nel linguaggio dei simboli $(z + y)$.[19]

[17]PL, p. 78.
[18]LT, p. 43.
[19]Ivi, p. 70.

Nel primo caso si opta per una somma inclusiva, nel secondo per una somma esclusiva, in entrambi i casi è evidente che la scelta operata è di tipo contenutistico; lo stesso Boole scrive:

> Prima di tradurre i nostri dati nel linguaggio dei simboli, è necessario accertarsi dell'importo intenzionale [*intended import*] delle parole che usiamo.[20]

Questo accorgimento è incompatibile con un sistema di logica formale e, sottolineandolo, Jevons porta alla luce un neo dell'algebra di Boole, a cui si può rimediare solo eliminando la restrizione sulla somma.

Dunque un'importantissima novità è la seguente: nel sistema di Jevons $A+B$ è considerato come non implicante affatto che A e B siano disgiunti, se si desidera esprimere questo si deve aggiungere un'ulteriore premessa (come $A = Ab$). La somma, con PL, diventa un'operazione totale: sempre definita.

Tornando all'obiezione, Jevons ritiene che il sistema di Boole, proprio perché basato sulla restrizione, si allontani dalla logica del pensiero comune:

> Non si può negare che il sistema di Boole sia consistente e perfetto in se stesso. [...]
>
> Ma non è detto che un sistema perfetto debba essere una rappresentazione perfetta del sistema naturale del pensiero umano. Non è detto che le leggi del pensiero così come previste dal sistema corrispondano alle leggi del pensiero nella realtà. Se è così, il sistema non sarà un sistema di logica pura o naturale. Io credo sia questo il caso. Il sistema del professor Boole è logica pura legata ad una condizione [la restrizione sulla somma] che la converte da un sistema puramente logico ad un sistema numerico.[21]

### 3.1.3 L'interpretazione dei simboli $\frac{1}{1}$, $\frac{0}{0}$, $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{0}$

Esaminiamo la seconda obiezione che riguarda i simboli logici:

> I simboli $\frac{1}{1}$, $\frac{0}{0}$, $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{0}$ non stabiliscono per se stessi alcun significato logico, mantengono solo un significato derivato da qualche metodo di ragionamento non contenuto nel sistema simbolico. I significati, in breve, sono quelli ottenuti con l'auto-evidente metodo indiretto del presente lavoro.[22]

Jevons evidenzia un aspetto critico dell'elaborazione booleana: l'introduzione di coefficienti numerici diversi da 0 e 1; la loro interpretazione logica, infatti, risulta 'probematica' e non immediata.

[20] Ivi, p. 43.
[21] PL, p. 75.
[22] Ivi, p. 84.

Prima di proseguire nell'analisi dell'argomentazione di Jevons, facciamo riferimento al capitolo VI di LT per mostrare come, e perché, Boole introduca questi simboli e quale sia l'interpretazione proposta.

Nel corso dell'opera Boole evita prudentemente di usare i simboli $\frac{0}{0}$ e $\frac{1}{0}$, li introduce solo in connessione con la soluzione di equazioni della forma $V = w$, dove $w$ rappresenta un simbolo di classe e V è una funzione, anche frazionaria, contenente altre classi ($x$, $y$, $z$, $\ldots$). Equazioni di questo tipo si ottengono quando si tenta di dare una risposta a ciò che Boole definisce "uno dei problemi più generali della logica":

> Data una qualunque equazione logica che collega i simboli $x$, $y$, $z$, $\ldots$, $w$, si richiede un'espressione interpretabile della relazione esistente tra la classe rappresentata da $w$ e gli altri simboli.[23]

Essendo tutti i termini coinvolti in essa interpretabili, l'equazione data sarà sempre di primo grado rispetto ad ognuno dei simboli; perciò si può trovare un'espressione per il termine $w$ in funzione degli altri termini. Infatti, se si sviluppa rispetto a $w$ l'equazione data, qualunque sia la sua forma, si ottiene l'equazione:

$$Ew + E'(1 - w) = 0,$$

dove E ed E' sono funzioni degli altri simboli, non contenenti $w$. Da questa, risolvendo rispetto a $w$, si ha:

$$Ew + E' - E'w = 0,$$
$$E' = E'w - Ew,$$
$$w = \frac{E'}{E' - E}.$$

Il passo successivo consiste nello sviluppo del secondo membro rispetto a tutti i termini di classe che contiene. Boole interpreta l'espressione così ottenuta dividendo i coefficienti dello sviluppo in quattro categorie[24], ciascuna con la rispettiva interpretazione:

---

[23] LT, p. 64.

[24] Boole dimostra (LT, p. 121) che se il primo membro di un'equazione $V = 0$ soddisfa la condizione $V(1-V) = 0$ e se si determina l'espressione di un simbolo $w$ di questa equazione in funzione degli altri simboli, i coefficienti dello sviluppo possono solo assumere una di queste forme: 0, 1, $\frac{0}{0}$, $\frac{1}{0}$. Infatti data l'equazione:

$$w = \frac{E'}{E' - E},$$

è evidente che gli unici valori numerici che E ed E' possono ricevere come coefficienti nello sviluppo sono 1 o 0. Dunque possono verificarsi i seguenti casi:

1. $E' = 1$, $E = 1$, allora $\frac{E'}{E'-E} = \frac{1}{0}$.
2. $E' = 1$, $E = 0$, allora $\frac{E'}{E'-E} = 1$.
3. $E' = 0$, $E = 1$, allora $\frac{E'}{E'-E} = 0$.
4. $E' = 0$, $E = 0$, allora $\frac{E'}{E'-E} = \frac{0}{0}$.

- **Coefficienti uguali a 1.** Poiché 1 è il simbolo dell'universo e poiché il prodotto tra due simboli di classe rappresenta gli individui che si trovano in entrambe le classi, ogni costituente che ha 1 come coefficiente dev'essere preso interamente, cioè dev'essere presa l'intera classe che esso rappresenta.

- **Coefficienti uguali a 0.** Poiché in logica questo è il simbolo della classe vuota, non dev'essere presa nessuna parte delle classi rappresentate da un costituente che abbia come coefficiente 0.

- **Coefficienti della forma $\frac{0}{0}$.** Indicano che dev'essere presa una *parte indefinita* [*indefinite portion*] della classe a cui sono affissi (cioè *tutti*, *alcuni* o *nessuno* dei suoi membri).

- **Coefficienti che non appartengono a nessuno dei casi precedenti ($\frac{1}{0}$).** I costituenti che presentano un coefficiente appartenente a questa classe devono essere eguagliati a 0.

In simboli:

$$w = 1A + 0B + \frac{0}{0}C + \frac{1}{0}D,$$

dove $A$, $B$, $C$ e $D$ rappresentano la somma dei costituenti aventi il coefficiente indicato; e questa equazione viene così interpretata, definendo $v$ come un simbolo che indica una classe indefinita:

$$w = A + vC, \tag{3.1a}$$
$$D = 0. \tag{3.1b}$$

Su questo Boole dice:

> L'interpretazione di (3.1a) mostra quali elementi entrano, o potrebbero entrare, nella composizione di $w$, la classe di cose la cui definizione è richiesta; e l'interpretazione di (3.1b) mostra quale relazione esiste tra gli elementi del problema originale, senza nessuna dipendenza da $w$.
>
> Questi sono i canoni dell'interpretazione. Va aggiunto che essi sono universali nella loro applicazione, e che il loro uso non è mai inficiato da eccezioni o fallimento.[25]

Va sottolineato che i coefficienti 0, 1, $\frac{0}{0}$ appaiono nello sviluppo indipendentemente dalla condizione $V(1-V)=0$, lo stesso non vale per il coefficiente $\frac{1}{0}$. Se la condizione non è soddisfatta, i termini, al posto di $\frac{1}{0}$ potranno assumere qualsiasi valore diverso da 0, 1, $\frac{0}{0}$. E saranno comunque considerati membri della quarta categoria.

[25] LT, p. 68.

Le ragioni che Boole propone per giustificare alcune di queste interpretazioni non appaiono pienamente convincenti, in particolare quelle riguardanti le ultime due categorie.

Per quanto riguarda il simbolo $\frac{0}{0}$, l'interpretazione è data "per analogia":

> Poiché in aritmetica il simbolo $\frac{0}{0}$ rappresenta un *numero indefinito* [*indefinite number*], eccetto quando è determinato da qualche circostanza particolare; per analogia, nel sistema di logica di questo lavoro, lo stesso simbolo rappresenterà una *classe indefinita* [ *indefinite class*].[26]

È chiaro che l'interpretazione non è dedotta incontrovertibilmente dalle proprietà logiche del simbolo (come per 1 o 0), pertanto Boole ne propone una verifica tramite un esempio. Si consideri la proposizione *Non esistono uomini (y) che non siano mortali (x)* rappresentata dall'equazione

$$y(1 - x) = 0.$$

Si desidera una definizione della classe *esseri mortali* in funzione della classe *uomini*:

$$y - yx = 0,$$
$$yx = y.$$

Il passaggio successivo consiste nell' "esprimere"[27] la divisione,

$$x = \frac{y}{y},$$

e sviluppare il secondo membro:

$$x = y + \frac{0}{0}(1 - y).$$

Questa espressione implica che la classe dei mortali ($x$) consiste di tutti gli uomini ($y$) e di una parte rimanente indeterminata (alcuni, tutti o nessuno) di esseri che non sono uomini ($1 - y$), indicata dal coefficiente $\frac{0}{0}$. Boole aggiunge:

> Sebbene la precedente determinazione del significato del simbolo $\frac{0}{0}$ sia fondata solo sull'esame di un caso particolare, il principio utilizzato nella dimostrazione è generale, e non ci sono circostanze

[26] Ivi, p. 65.

[27] Se si fosse in un sistema algebrico si potrebbe semplificare l'equazione dividendo entrambi i membri per $y$; Boole tuttavia sottolinea l'illegittimità di questo passaggio in logica. Dunque la divisione si può *esprimere* [*to express*] ma non *eseguire* [*to perform*]: non si può semplificare un fattore comune al numeratore e al denominatore a meno che non si tratti di costanti numeriche $\neq 0$.

in cui il simbolo sia presente e lo stessa modalità di analisi inapplicabile. Noi possiamo considerare il termine $\frac{0}{0}$ un simbolo di una *classe indefinita*, e possiamo rimpiazzarlo con un simbolo non composto [*uncompounded*] $v$, soggetto alla legge fondamentale, $v(1-v) = 0$.[28]

Per giustificare l'interpretazione della quarta categoria, Boole dimostra un teorema: *dato lo sviluppo di una funzione $V$ che rappresenta una classe o collezione di oggetti, $w$; se il coefficiente numerico, $a$, di un costituente dello sviluppo, non soddisfa la legge*

$$a(1-a) = 0,$$

*allora il costituente in questione dev'essere eguagliato a 0.* Per dimostrarlo rappresentiamo lo sviluppo dato:

$$w = a_1t_1 + a_2t_2 + a_3t_3 + \cdots + a_it_i, \tag{3.2}$$

dove $a_1$, $a_2$, ..., $a_i$ sono i coefficienti e $t_1$, $t_2$, ..., $t_i$ i costituenti; inoltre si suppone che $a_1$ e $a_2$ non soddisfino la legge indice, mentre gli altri sì: ${a_i}^2 = a_i$. Eleviamo al quadrato ambo i membri di (3.2)[29]:

$$w = {a_1}^2t_1 + {a_2}^2t_2 + a_3t_3 + \cdots + a_it_i. \tag{3.3}$$

Sottraendo l'equazione (3.3) dalla (3.2) si ottiene:

$$0 = (a_1 - {a_1}^2)t_1 + (a_2 - {a_2}^2)t_2,$$

cioè

$$a_1(1-a_1)t_1 + a_2(1-a_2)t_2 = 0. \tag{3.4}$$

Moltiplicando la (3.4) per $t_1$, e ricordando la proprietà dei costituenti per cui se $t$ e $t'$ sono diversi allora $tt' = 0$, si ha:

$$a_1(1-a_1)t_1 = 0,$$

e, poiché per ipotesi $a_1(1-a_1) \neq 0$, segue $t_1 = 0$. Lo stesso vale per $t_2$, cioè per ogni singolo costituente che abbia un coefficiente che non soddisfa la legge fondamentale.

Dunque, assumendo questo teorema, sorge spontanea una domanda: i coefficienti $\frac{0}{0}$ e $\frac{1}{0}$ soddisfano la legge fondamentale? Come sottolinea Hailperin[30] Boole evita, prudentemente, di affrontare la questione dal punto di vista aritmetico (cioè non si pone mai esplicitamente la domanda: le equazioni $(\frac{0}{0})^2 = \frac{0}{0}$ e $(\frac{1}{0})^2 = \frac{1}{0}$ sono vere?). Le sue risposte, basate su un' "analogia" con l'aritmetica, risultano piuttosto vaghe. Brevemente, per quanto riguarda il simbolo $\frac{0}{0}$ la risposta sembra essere positiva:

[28] LT, p. 66.

[29] Moltiplicando ciascun membro con se stesso bisogna tener conto di tre cose: per ipotesi tutti i coefficienti, eccetto $a_1$ e $a_2$, soddisfano la legge fondamentale; i costituenti di uno sviluppo sono sempre interpretabili; il prodotto tra due costituenti diversi è sempre nullo.

[30] [9], p. 97.

> Il simbolo $\frac{0}{0}$, la cui interpretazione è stata precedentemente discussa, non necessariamente disobbedisce alla legge che stiamo qui considerando [la legge indice], poiché esso ammette indifferentemente i valori numerici 0 e 1.[31]

Riguardo al simbolo $\frac{1}{0}$ ci si aspetta una risposta negativa, considerata l'interpretazione dello stesso. Ed in effetti, così sembra essere, nonostante Boole non sia esplicito:

> È stato mostrato che ogni costituente il cui coefficiente non è soggetto alla legge fondamentale dev'essere separatamente eguagliato a zero. La forma con cui solitamente coefficienti di questo tipo appaiono è $\frac{1}{0}$. Questo è il simbolo algebrico dell'infinito. Ora, tanto più un numero qualsiasi si avvicina all'infinito, tanto più esso si allontana dalla condizione di soddisfare la legge fondamentale di cui si è parlato.[32]

Naturalmente ad un lettore attento come Jevons non poteva sfuggire questa mancanza di chiarezza nell'introduzione di simboli diversi da 0 e 1 ed in particolare i problemi legati all'interpretazione di essi.

Jevons nella sua obiezione si concentra solo su $\frac{0}{0}$, ritenendo che sia sufficiente mostrare l'incapacità di un sistema anche in una sola istanza per poter affermare la necessità di un altro sistema che lo supporti. Tuttavia, alla luce di quanto si è detto, non risulta difficile immaginare le perplessità legate al simbolo $\frac{1}{0}$.

Per quanto riguarda invece i simboli $\frac{1}{1}$ e $\frac{0}{1}$ bisogna aggiungere che la loro interpretazione algebrica è chiara: rispettivamente valgono 1 e 0, e Jevons non precisa il motivo per cui introduce anche essi tra i simboli che non hanno significato logico di per se stessi. È difficile pensare che Jevons non approvi l'introduzione di 0 e 1 tra i simboli della logica, perché si tratta in questo caso di meri segni convenzionali: Boole li sceglie per raggiungere un accordo formale tra i simboli della logica e quelli dell'algebra (0 e 1 algebricamente, sono gli unici zeri del polinomio $x(1-x)$, le uniche radici della legge indice: $x^2 = x$, la legge fondamentale del suo intero sistema logico) — nulla avrebbe vietato di usare altri simboli (come $\emptyset$ o $U$).

Si può ritenere che l'aspetto problematico sia la forma frazionaria con cui questi simboli compaiono nello sviluppo di un'equazione. Sembra, infatti, che Boole abbandoni le cautele legate alla divisione, la necessità — a cui si è accennato — di non *eseguire* la divisione ma di limitarsi ad *esprimerla* quando essa riguarda due termini logici; 0 e 1 denotano classi, esattamente come $x$, $y$, etc. e non è chiaro come si possano dividere classi; dunque il fatto che valgano le equazioni

$$\frac{1}{1} = 1 \text{ e } \frac{0}{1} = 0$$

[31] LT p. 67.
[32] Ibidem.

in logica non è pacifico tanto quanto in algebra.

Si potrebbe obiettare che i coefficienti dello sviluppo sono a tutti gli effetti valori numerici e che quindi non ci dovrebbe essere nessun veto sulla divisione. Allora non si spiegherebbe, però, perché Boole giustifichi l'interpretazione dei coefficienti 0 e 1 a partire dal loro significato *logico*; ricordiamo:

> Poiché 1 è il simbolo dell'universo e poiché il prodotto tra due simboli di classe rappresenta gli individui che si trovano in entrambe le classi, ogni costituente che ha 1 come coefficiente dev'essere preso interamente, cioè dev'essere presa l'intera classe che esso rappresenta.

Ed inoltre:

> Poiché in logica 0 è il simbolo della classe vuota, non dev'essere presa nessuna parte delle classi rappresentate da un costituente che abbia come coefficiente 0.

Dunque, in definitiva, il problema potrebbe essere (ed il condizionale è d'obbligo considerato che Jevons lancia solo un suggerimento e non approfondisce) la mancanza di univocità nell'interpretazione che da logica diventa matematica — e viceversa — creando qualche ambiguità.

Tornando all'obiezione generale, Jevons ritiene che il significato dei simboli $\frac{1}{1}$, $\frac{0}{0}$, $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{0}$ nel sistema di Boole non sia dato dal metodo stesso:

> In Boole, allora, riguardo al simbolo $\frac{0}{0}$ [e dunque riguardo anche gli altri], non è il sistema a conferire una certa conoscenza; esso è, al massimo, un sistema che sottolinea verità [*truths*] che ci sono mostrate come certe da un altro sistema intuitivo di ragionamento.[33]

Il sistema che dovrebbe "supportare" quello di Boole (data la sua carenza nell'attribuzione di significato ai simboli) è, naturalmente, quello dello stesso Jevons. Per argomentare questa tesi, l'autore mostra la corrispondenza tra questi simboli "oscuri" e le "evidenti inferenze" del suo sistema.

Non è difficile scorgere una corrispondenza: è evidente, nonostante una leggera differenza nella formalizzazione, la somiglianza tra l'alfabeto logico di Jevons (es. dati due termini $A$ e $B$: $AB$, $Ab$, $aB$, $ab$) e i costituenti dello sviluppo booleano ($ab$, $a(1-b)$, $(1-a)b$, $(1-a)(1-b)$). Basta riflettere un attimo per comprendere che questo vale anche per $n$ termini.

Per quanto riguarda i coefficienti la corrispondenza si struttura come segue:

- i costituenti che in Boole appaiono accompagnati dal simbolo $\frac{1}{1}$ corrispondono alle combinazioni considerate *soggetti inclusi*;

[33] PL, p. 85.

- quelli con il coefficiente $\frac{0}{0}$ corrispondono ai *soggetti esclusi*;
- quelli con $\frac{1}{0}$ o $\frac{0}{1}$ corrispono alle combinazioni *contraddittorie* o *inconsistenti* — che, per inciso, vanno eguagliate a 0 così come in Boole.

In un altro saggio è possibile rintracciare lo stesso discorso:

> È estremamente opinabile che ci sia un'analogia tra il significato di questi simboli in matematica e quello che Boole ha assegnato loro in logica. In realtà il simbolo 1 denota nella logica di Boole l'inclusione di una combinazione nell'espressione di un termine, e 0 l'esclusione. Di conseguenza $\frac{1}{0}$ indica che la combinazione è inclusa nel soggetto ma non nel predicato, ed è dunque inconsistente con la proposizione; e $\frac{0}{1}$ indica l'inclusione nel predicato e l'esclusione dal soggetto di un'identità, e dunque anch'esso genera inconsistenza. L'inclusione in entrambi i membri è indicata con $\frac{1}{1}$, e l'esclusione da entrambi con $\frac{0}{0}$, in questi casi la combinazione è consistente con la proposizione.[34]

Jevons non aggiunge altro, tuttavia tale corrispondenza non è altrettanto evidente di quella tra combinazioni e costituenti di cui si è parlato. Il confronto non è immediato: considerata una premessa che contiene $n$ termini, le combinazioni in Jevons saranno ricavate a partire da $n$ termini (e saranno $2^n$), da esse si ricaverà l'espressione per il termine che ci interessa, che conterrà — a meno che non si possa semplificare — il termine stesso; in Boole invece prima si 'isola' il termine desiderato e lo si esprime in funzione degli altri termini e poi si sviluppa il secondo membro che conterrà $n-1$ termini, quindi i costituenti dello sviluppo e i rispettivi coefficienti saranno $2^{n-1}$ e non conterranno il termine isolato.

Consideriamo un semplice esempio: una premessa come $CA = CB$, da cui si vuol ricavare l'espressione di $B$ rispetto agli altri termini. In Boole si avrà:

$$ca = cb,$$
$$b = \frac{ca}{c}.$$

Sviluppando il secondo membro si avranno $2^2 = 4$ costituenti:

$$b = 1ac + \frac{0}{0}a(1-c) + \frac{0}{1}(1-a)c + \frac{0}{0}(1-a)(1-c).$$

Ossia:

$$b = 1\underbrace{ac}_{A} + 0\underbrace{(1-a)c}_{B} + \frac{0}{0}\underbrace{[a(1-c) + (1-a)(1-c)]}_{C}, \tag{3.5}$$

[34] [12], p. 169.

dove A, B, C indicano le somme dei costituenti aventi come coefficiente rispettivamente 1, 0 e $\frac{0}{0}$.

Nel sistema di Jevons le combinazioni da confrontare con la premessa saranno $2^3 = 8$:

| | |
|---|---|
| $ABC$ | soggetto incluso |
| $ABc$ | soggetto escluso |
| $AbC$ | contraddizione |
| $Abc$ | soggetto escluso |
| $aBC$ | contraddizione |
| $aBc$ | soggetto escluso |
| $abC$ | soggetto incluso |
| $abc$ | soggetto escluso |

Consideriamo l'espressione per $B$:

$$B = ABC + ABc + aBC.$$

Si può evidenziare la corrispondenza:

- i costituenti dello sviluppo (3.5) raggruppati sotto A, cioè $ac$, in Jevons compaiono come *soggetti inclusi* (in questo caso: $ABC$);
- il costituente avente come coefficiente 0 corrisponde alla *combinazione contraddittoria* $aBC$;
- i costituenti raggruppati sotto C, cioè quelli aventi come coefficiente $\frac{0}{0}$ corrispondono ai *soggetti esclusi* ($ABc$ e $aBc$).

In questo elenco sono state considerate e confrontate solo le combinazioni che compaiono nell'espressione di $B$, ma si può ragionevolmente supporre che una simile corrispondenza valga per ogni combinazione, se confrontata con il rispettivo costituente dello sviluppo di un termine qualsiasi.

In ogni caso, dopo aver elencato lapidariamente le regole di corrispondenza di cui sopra, Jevons conclude:

> La corrispondenza di queste oscure forme con le auto-evidenti inferenze del presente sistema è talmente stretta ed ovvia da suggerire inequivocabilmente che le operazioni del professor Boole con il suo astratto calcolo di 0 e 1 non sono altro che una mera controparte delle operazioni auto-evidenti con i simboli della logica pura.[35]

Dunque, dopo aver considerato i simboli, analizziamo quali dovrebbero essere secondo Jevons le operazioni della logica pura.

[35]PL, p. 86.

## 3.2 Operazioni

Come è stato visto nella sezione 2.2 a pagina 14, le operazioni della logica secondo Jevons sono due: combinazione fra termini, analoga alla moltiplicazione fra numeri, e separazione, analoga alla divisione. Mentre la combinazione, così come la moltiplicazione in algebra, è sempre definita (nel linguaggio moderno: è un'*operazione totale*); la separazione è subordinata ad una condizione: nessun dividendo deve contenere tra i suoi significati quello del divisore. L'unico modo per essere sicuri che questa restrizione venga rispettata è astenersi dall'applicare l'operazione se i termini in ballo sono ignoti. Jevons sottolinea che questa restrizione non va ad inficiare la corrispondenza tra logica e matematica, in quanto esiste una restrizione anche per la divisione: non si possono dividere entrambi i membri di un'equazione per un fattore ignoto, poiché esso potrebbe essere $= 0$.[36]

La stessa riflessione era stata fatta da Boole:

> Dall'equazione
>
> $$zx = zy$$
>
> non si può inferire che anche l'equazione
>
> $$x = y$$
>
> è vera. In altre parole, l'assioma dell'algebra, secondo il quale entrambi i membri di un'equazione possono essere divisi per uno stesso numero non trova nessun equivalente formale nel nostro sistema.
>
> [...]
>
> Ma se esaminiamo le cose un po' più accuratamente, vedremo che anche nell'algebra ordinaria questo assioma non possiede la generalità di quegli altri assiomi che abbiamo preso in considerazione [quelli dell'addizione e della sottrazione]. La derivazione dell'equazione $x = y$ dall'equazione $zx = zy$ è valida solo quando si sappia che $z$ non è uguale a 0. Dunque, assumendo che il valore $z = 0$ sia ammissibile nel sistema dell'algebra, l'assioma sopra enunciato non può più essere applicato e l'analogia precedentemente esemplificata rimane, per lo meno, intatta.[37]

A questo proposito Hailperin sottolinea che anche l'espressione corretta della legge algebrica,

$$z \neq 0 \text{ e } zx = zy \text{ implicano } x = y,$$

[36]Si veda la tabella 3.1 a pagina 72.

[37]LT, p. 26.

non vale in logica, cioè non vale in generale se $x$, $y$ e $z$ rappresentano classi; ma sia Boole che Jevons sembrano ignorare o trascurare eccezioni di questo tipo.

Prima di procedere all'analisi dell'obiezione riguardante le operazioni della logica, ricordiamo brevemente quali sono le operazioni ammesse nel sistema di Boole. È interessante, prima di tutto, osservare in che termini Boole si riferisce alle operazioni quando descrive il sistema dei segni:

> Segni di operazioni, come $+$, $-$, $\times$, stanno per quelle operazioni della mente [*operations of the mind*] per mezzo delle quali le concezioni delle cose vengono combinate o scomposte in modo da formare nuove concezioni, che contengono gli stessi elementi.[38]

Le operazioni della mente corrispondono ad operazioni sui nomi, o sui termini, e sono sono tre:

**Moltiplicazione, o intersezione, tra classi $xy$:** rappresenta la classe di cose a cui sono applicabili, simultaneamente, i nomi rappresentati da $x$ e $y$.

**Addizione, o unione, tra classi disgiunte $x + y$:** forma la concezione complessiva di un gruppo di oggetti consistente di gruppi parziali; corrisponde alle parole 'e' ed 'o' del linguaggio comune. Restrizione: $xy = 0$.

**Sottrazione, o complemento relativo, $x - y$:** separa una parte da un tutto; è espressa nel linguaggio comune dalla parola "eccettuato" [*except*]. Restrizione: $y \subseteq x$.

### 3.2.1 Le operazioni della logica pura

L'obiezione che Jevons muove nei confronti del sistema di Boole, ed in particolare riguardo alle operazioni logiche testé descritte, è così formulata:

> Non ci sono operazioni come l'addizione e la sottrazione nella logica pura. Le operazioni della logica sono la combinazione e la separazione dei termini, corrispondenti alla moltiplicazione e alla divisione in matematica.[39]

Il riferimento è agli assiomi generali relativi al simbolo di uguaglianza (=) enunciati da Boole nel secondo capitolo di LT:

1. Se a cose uguali si aggiungono cose uguali le loro somme sono uguali.

2. Se da cose uguali si sottraggono cose uguali i resti sono uguali.

[38] Ivi, p. 19.
[39] PL, p. 79.

Boole aggiunge:

> Si vede, di qui, che possiamo sommare o sottrarre equazioni ed impiegare la regola della *trasposizione*, proprio come si fa nell'algebra ordinaria.[40]

La regola di trasposizione garantisce che:

$$x = y + z \rightarrow x - z = y.$$

Jevons vuole mostrare che nella logica pura questi assiomi non sono sempre validi, mostrando come la stabiltà del sistema di Boole venga minata dalla scelta di queste operazioni. Per farlo considera una proposizione di Boole:

$$x = y + z \tag{3.6}$$

ed attribuisce i seguenti significati:

x= Cesare

y= conquistatore della Gallia

z= primo imperatore di Roma,

ritenendo che non ci sia nulla d'assurdo nell'affermare: *Cesare è il conquistatore della Gallia o il primo imperatore di Roma.* L'autore procede inferendo, così come fa Boole, l'equazione

$$x - z = y,$$

e osserva:

> Allora noi abbiamo la strana inferenza: *Cesare, a patto che* [*provided*] *non sia il primo imperatore di Roma, è il conquistatore della Gallia.*

Può venire il sospetto che Jevons, così facendo, interpreti un passaggio intermedio, ma in effetti $x - z = y$ potrebbe essere il passaggio finale della risposta alla domanda: data la premessa (3.6), in che relazione si trova $y$ con $x$ e $z$? Il sistema di Boole, tuttavia, prevede lo sviluppo del membro $x - z$ prima dell'interpretazione. Jevons trascura questo aspetto, si può comunque provare a vedere cosa succede. Sviluppando si ha:

$$y = 0xz + 1x(1 - x) - 1(1 - x)z + 0(1 - x)(1 - z),$$

e, applicando le regole di interpretazione 3.1 a pagina 41 si ottiene:

$$y = x(1 - z), \tag{3.7a}$$
$$(1 - x)z = 0. \tag{3.7b}$$

Cioè:

[40] LT, p. 25.

(3.7a) : *Il conquistatore della Gallia è Cesare ma non il primo imperatore di Roma*,

(3.7b) : *Non esiste un primo imperatore di Roma che non sia Cesare.*

Queste conclusioni possono sembrare bizzarre, ma sono coerenti con il sistema di Boole: la (3.7a) segue dal carattere esclusivo della somma; mentre la (3.7b) e l'assurdo che sembra derivarne sono dovuti alla leggerezza con cui Jevons ha assegnato i significati ai simboli $x$, $y$, $z$ nell'espressione (3.6). Quest'ultima, infatti, ha la forma di un'universale affermativa con predicato universale, cioè indica un'*identità* tra la classe singoletto *Cesare* e la classe formata dagli elementi di $y$ e da quelli di $z$ — escludendo gli elementi comuni alle due classi. Tale identità è errata in quanto la classe *il primo imperatore di Roma o il conquistatore della Gallia* include la classe *Cesare*, ma le due non sono coestensive: esistono elementi appartenenti alla 'classe unione' che non sono Cesare. In termini più generali: nel sistema di Boole una classe che denota una somma non può contenere meno di due elementi (se nessuna delle due classi sommate è vuota) e dunque non può essere coestensiva di una classe singoletto, che per definizione contiene solo un elemento.

Se si considerasse un'assegnazione più opportuna non sorgerebbe nessuna contraddizione. L'equazione $x = y + z$ potrebbe essere interpretata: *Le stelle* (x) *sono i soli* (y) *o i pianeti* (z) — classico esempio booleano. In questo caso l'interpretazione dello sviluppo sarà:

(3.7a) : *I soli sono tutte quelle stelle che non sono pianeti*,

(3.7b) : *Non esistono pianeti che non siano stelle.*

In definitiva l'esempio di Jevons appare inefficace considerato che lo scopo era quello di problematizzare le operazioni di addizione e sottrazione così come sono presentate nel sistema di Boole. L'autore, tuttavia, propone argomentazioni più incisive e, questa volta, di carattere generale.

Per quanto riguarda il primo assioma, viene considerata, a titolo d'esempio, una proposizione $A = B$, che significa: *ogni* $A$ *è ogni* $B$. Aggiungendo ad entrambi i membri il termine $C$ si ottiene:

$$A + C = B + C,$$

che è senza dubbio una proposizione vera, ma è un risultato auto-evidente ed inutile.

Per la sottrazione, l'obiezione è più articolata: il secondo assioma non produce risultati validi ma inutili così come il primo, la sua applicazione genera proposizioni che non seguono dalla premessa. Si consideri la proposizione logica:

$$A + B + C = A + D + E,$$

essa esprime: *ciò che è $A$ o $B$ o $C$ è $A$ o $D$ o $E$ e viceversa.* Non essendoci restrizioni sul significato — eccetto il fatto che lo stesso termine deve avere sempre lo stesso significato dall'inizio alla fine del problema — non è dato sapere quale tra $A$, $B$, $C$ sia $D$, né quale sia $E$, e viceversa. La proposizione non dà indicazioni di questo tipo. Jevons osserva:

> In queste circostanze, la sottrazione non si applica. Non è necessariamente vero che "se da cose uguali togliamo cose uguali i rimanenti sono uguali". Non è ammissibile sottrarre la stessa cosa ($A$) da entrambi i lati della proposizione e quindi inferire $B + C = D + E$. Questo non è vero se, per esempio, $B$ e $C$ sono uguali ad $E$ e $D$ è uguale ad $A$.[41]

Dunque la sottrazione è valida solo ad una condizione logica: le diverse alternative di un termine devono essere mutualmente esclusive o contrarie. Jevons modifica l'espressione dell'esempio precedente in maniera tale da rendere le alternative esclusive:

$$AMN + BMn + CmN = AMN + DMn + EmN, \tag{3.8}$$

è infatti impossibile che $AMN$ sia $DMn$ o $EmN$. Allora si è liberi di sottrarre $AMN$ da entrambi i membri, ottenendo una conclusione corretta:

$$BMn + CmN = AMN + DMn. \tag{3.9}$$

Jevons aggiunge:

> Quando le alternative sono contrarie tra loro, la sottrazione di una di esse è equivalente alla combinazione con entrambi i membri delle alternative restanti. L'assioma della sottrazione non è altro che un caso particolare della legge di combinazione secondo cui se termini uguali vengono combinati con termini uguali, gli interi sono uguali.[42]

In effetti sottrarre $AMN$ dall'equazione (3.8), in cui i termini congiunti sono contrari, è equivalente a combinare con entrambi i membri di essa il termine $(Mn + mN)$.

Naturalmente, per Boole, tali precisazioni non avrebbero avuto motivo di esistere, in quanto nel suo sistema, per definizione, il simbolo + congiunge solo classi che non hanno elementi in comune; dunque le alternative sono sempre esclusive, tali che se $A + B$ allora $AB = 0$.

Nel sistema di Jevons, venendo meno questa restrizione, come abbiamo visto nella sezione 3.1.2 a pagina 36, i processi di addizione e sottrazione

[41] PL, p. 80.
[42] Ivi, p. 81.

risultano problematici; tuttavia, secondo l'autore essi possono essere efficacemente sostituiti dall'operazione di combinazione. Tornando all'esempio iniziale:

$$A + B + C = A + D + E,$$

non ci è dato sapere se le alternative sono contrarie o no, dunque l'inferenza:

$$B + C = D + E$$

non è valida. Sarà valida però la conclusione ottenuta tramite combinazione:

$$aA + aB + aC = aA + aD + aE,$$

dalla quale, eliminando i termini contraddittori si ha:

$$aB + aC = aD + aE.$$

In altre parole: gli assiomi elencati da Boole sono validi solo sotto una condizione logica, che certamente non è applicabile al pensiero o al linguaggio in generale. E secondo Jevons la logica, ritenuta "la scienza superiore" [*the superior science*], deve poter occuparsi di alternative qualsiasi, alternative delle quali non è noto se siano uguali o contrarie. Per questo motivo tra le operazioni della logica pura non possono comparire l'addizione e la sottrazione.

In conclusione all'obiezione si possono aggiungere delle osservazioni: l'addizione nel sistema di Jevons è presente, ma questa non è una contraddizione in quanto il segno + è usato come disgiunzione, anche inclusiva, di alternative; dunque esso è una particolare notazione per i termini plurali, non un'operazione della logica (o della mente).

> [...], io rifiuto l'uso del segno negativo. Penso che esso non abbia un posto nella logica, ma che sia derivato dall'aritmetica e dalla matematica. Lei giustamente dice che tutte le operazioni implicano il loro opposto, quindi il segno di addizione + implica il $-$. Ma io non considero + come implicante un'*operazione in logica.*[43]

Anticipiamo che, nei lavori di logica successivi a PL, Jevons userà al posto dell'ambiguo segno di addizione il simbolo ·|·, per differenziarsi, anche a livello simbolico, dalla notazione matematica.

Inoltre si può accennare a degli aspetti poco chiari relativi all'operazione di sottrazione così come è descritta da Boole. Essa è l'operazione inversa dell'addizione, viene indicata con $x - y$, corrisponde nel linguaggio comune alla parola 'eccettuato' (esempio: *Tutti gli uomini, eccettuati gli asiatici*) e,

[43][7], p. 28.

così come l'addizione, è un'operazione ristretta: il suo uso implica che "le cose sottratte siano una parte delle cose dalle quali sono sottratte". Da questa breve descrizione si sarebbe portati a pensare che la sottrazione sia un'operazione binaria (un'operazione, insiemisticamente parlando, di complemento relativo); tuttavia Boole, sulla base di un esempio linguistico (*eccettuati gli asiatici, tutti gli uomini*), conclude che

$$x - y = -y + x,$$

senza spiegare quale sia il significato di $-y$, senza giustificare come questo termine, dalla dubbia interpretazione, possa poi essere sommato ad $x$ e del perché la proposizione in questione venga rappresentata come una somma. In effetti sarebbe un errore considerare $-y$ come un complemento assoluto, cioè come un'abbreviazione di $1 - y$ in quanto non vale

$$x - y = 1 - y + x,$$

tanto più considerato che sommare $1-y$ con $x$ significherebbe sommare classi non disgiunte, contravvenendo alla restrizione sulla somma.

Quanto a Jevons, un ulteriore motivo per rifiutare la sottrazione sta nel fatto che questa operazione è inconsistente con l'auto-evidente legge di unità. Per mostrare questo viene considerata un'espressione che rappresenta l'universo 1:

$$x + (1 - x),$$

da questa si vogliono selezionare gli $x$ e per farlo la si combina proprio con $x$ (in quanto $x = 1 \cdot x$), ottenendo:

$$x(x + 1 - x) = x + x - x.$$

In Boole si avrebbe: $x + x - x = x$, il risultato richiesto, eliminando, come in algebra, $x$ e $-x$. Se si assume anche la legge d'unità, l'espressione $x + x - x$ diventa uguale a 0 e non ad $x$. La contraddizione che ne deriva mostra la necessità di rifiutare l'operazione inversa di sottrazione.

## 3.3 Leggi

Prima di confrontare i due sistemi di leggi è necessaria una premessa. Boole ricava le *leggi logiche* dall'analisi del linguaggio e delle operazioni che ci permettono di ragionare linguisticamente. Come osserva Mugnai:

> Ma le leggi fondamentali delle operazioni linguistiche altro non sono che la manifestazione di leggi più profonde che determinano la natura stessa della mente.[44]

[44][18], p. 113.

Infatti il terzo capitolo di LT è dedicato proprio a questo: "derivazione delle leggi dei simboli logici dalle leggi delle operazioni della mente umana". Dunque le leggi logiche booleane vengono considerate dall'autore a tutti gli effetti *leggi del pensiero*. Non ci si soffermerà sulla questione dell'appartenenza o meno di Boole alla corrente psicologista. Quello che interessa è evidenziare è il fatto che Boole in maniera puntuale e sistematica giustifica l'introduzione di ogni singola legge facendo riferimento alla struttura del pensiero. In Jevons, invece, un'analisi come questa è assente. Come abbiamo visto, egli introduce le leggi in forza della loro auto-evidenza. Alcune di esse vengono anche presentate come analoghe agli assiomi di Euclide, e Jevons sottolinea questo aspetto per mostrare la superiorità del suo sistema rispetto a quello di Boole:

> Ogni processo è di natura e forza auto-evidenti e governato da leggi tanto semplici quanto gli assiomi di Euclide.[45]

Nonostante questo, non è raro in PL che Jevons indichi le sue leggi come *leggi del pensiero*, essendo convinto della corrispondenza esistente tra il pensiero e le cose. In effetti presenta le leggi come "vere sia nella natura del pensiero che delle cose", in questo modo anch'egli sembra eludere l'annosa questione dello psicologismo: le leggi sono nella mente umana (e quindi soggettive) o nella natura (e quindi oggettive)? Affronterà esplicitamente questo argomento in *The Principles of science*, aderendo alla tesi dello Spencer circa la natura obiettiva della logica.

Gli autori concordano su un aspetto: le leggi logiche ammettono diversi gradi di 'importanza'. Secondo Boole tutte le scienze consistono di verità generali di natura tale da imporre l'assenso non appena vengono presentate alla nostra mente; ma soltanto alcune di queste verità sono primarie e fondamentali, le altre sono secondarie e derivate, ottenute tramite operazioni (paragonabili a regole d'inferenza) ben definite sul dominio. Anche Jevons distingue le leggi generali in leggi primarie e leggi derivate, che sono corollari [*corollaries*] delle prime.

Nella sezione 2.4 a pagina 17, abbiamo visto le leggi principali che governano l'uso dei termini nel sistema di Jevons. Possiamo richiamare brevemente, prima di operare un confronto, le leggi fondamentali elencate da Boole in LT:

**Commutatività:**

> **della moltiplicazione:** $xy = yx$
>
> **dell'addizione:** $x + y = y + x$

**Legge di dualità, o legge indice:** $x^2 = x$

[45] PL, p. 74.

**Distributività della moltiplicazione:**

> **sull'addizione:** $x(y + z) = xy + xz$
>
> **sulla sottrazione:** $x(y - z) = xy - xz$

**Proprietà dell'uguaglianza:**

> **Simmetria:** $x = y \to y = x$
>
> **Riflessività:** $x = x$
>
> **Euclideicità:** $x = y$, $x = z \to y = z$

**Proprietà di 0 e 1:** $x \cdot 0 = 0$, $x \cdot 1 = x$, $x + 0 = x$

I sistemi di leggi complessivamente si equivalgono: la commutatività è presente in Jevons sia per le combinazioni di termini ($AB = BA$) che per i termini plurali ($A + B = B + A$); il prodotto è distributivo sulle alternative ($A(B + C) = AB + AC$); inoltre l'uguaglianza, unica relazione ammessa, verifica le proprietà tipiche di una relazione d'equivalenza.

Ci sono, tuttavia, delle evidenti discrepanze:

1. Nel sistema di Jevons non è ammessa la sottrazione, dunque non ci sono leggi riguardanti il simbolo $-$ (di questo si è discusso nella sezione precedente).

2. La legge indice [*index law*], considerata da Boole la legge caratteristica del calcolo logico, in Jevons è presente sotto il nome di Legge di semplicità e si differenzia marcatamente da quella booleana perché coinvolge anche potenze superiori.

3. Tra le leggi elencate da Boole è assente la Legge di unità ($A + A = A$), legge considerata tra quelle principali della logica da Jevons.

Analizziamo questi ultimi due aspetti.

### 3.3.1 Legge di dualità o di semplicità?

Boole giustifica la validità della legge indice affermando:

> Poiché la combinazione tra due simboli letterali nella forma $xy$ esprime l'intera classe di oggetti ai quali è possibile applicare simultaneamente i nomi o le qualità rappresentati da $x$ e da $y$, ne consegue che, se i due simboli hanno esattamente lo stesso significato, la loro combinazione non esprime niente di più di quanto esprimerebbe uno dei due simboli, preso da solo. [...]
>
> Il dire, in relazione a qualche oggetto, "buono buono", benché sia un pleonasmo inutile e ingombrante, è lo stesso che dire "buono". In realtà tali ripetizioni di parole si usano qualche volta per

mettere in maggiore evidenza una qualità o per rafforzare un'affermazione. Ma quest'effetto è meramente secondario e convenzionale: non si fonda sulle relazioni intrinseche fra linguaggio e pensiero.[46]

Dunque in questo modo l'autore dimostra la validità dell'uguaglianza $xx = x$, ed inoltre, ricordando l'arbitrarietà con cui si esprimono le operazioni mentali, sceglie di adottare lo stesso principio di notazione usato nell'algebra ordinaria e di indicare la combinazione $xx$ con $x^2$.

Boole sottolinea che l'equazione che rappresenta questa legge fondamentale del pensiero, è un'equazione di secondo grado, e questo dovrebbe corrispondere al procedere della nostra mente per dicotomia:

> [...], se così non fosse tutto quanto il procedimento della dell'intendere sarebbe diverso da quello che è. Così, proprio in conseguenza del fatto che l'equazione fondamentale del pensiero è di secondo grado, eseguiamo le operazioni di analisi e classificazione dividendo i concetti in coppie di opposti, o, per usare un'espressione tecnica, per *dicotomia*.[47]

Jevons obietta che questa legge non fa altro che esprimere il fatto generale che $AAAAA \ldots = A$, cioè: una combinazione di un termine con se stesso ha lo stesso significato del termine da solo; egli fa presente questo aspetto a Boole in una delle sue lettere:

> Suggerisco che la legge che lei ha introdotto sotto il nome di legge di dualità [*law of duality*] venga chiamata *legge di semplicità* [*law of simplicity*]. Il suo effetto, per così dire, è quello di ridurre tutti i termini logici alla prima potenza e non vedo ragione di chiamarla legge di dualità, in particolare perchè $x^{100} = x$ o $x^3 = x$ sono vere così come $x^2 = x$.[48]

Boole nella sua risposta non fa riferimento a questa obiezione, ma in LT era stato abbastanza esplicito nel rifiutare la validità dell'espressione generica $x^n = x$ che aveva, invece, usato in MAL[49]; riportiamo la lunga nota a piè di pagina in cui Boole sottolinea questo aspetto, con particolare riferimento all'espressione $x^3 = x$.

[46] LT, p. 22.

[47] LT, p. 36.

[48] [7], p. 25.

[49] In [3], p. 17, leggiamo:

> Se da un gruppo di oggetti noi selezioniamo gli $x$, otteniamo una classe i cui membri sono gli $x$. Se ripetiamo l'operazione su questa classe non ci sarà nessun cambiamento: nel selezionare gli $x$ noi prendiamo l'intero. Così abbiamo:
>
> $$xx = x,$$
> $$x^2 = x;$$

Si sarebbe forse dovuto dire che l'esistenza dell'equazione $x^2 = x$ implica necessariamente l'esistenza dell'equazione $x^3 = x$, che è un'equazione di terzo grado, e si sarebbe forse dovuto cercare di determinare se quest'equazione non denoti un processo di tricotomia? Rispondiamo che in un sistema di logica l'equazione $x^3 = x$ non ammette interpretazioni. Infatti scrivendola sotto la forma

$$x(1-x)(1+x) = 0, \tag{3.10}$$

oppure

$$x(1-x)(-1-x) = 0, \tag{3.11}$$

si vede che l'assegnarle un'interpretazione, ammesso che la cosa sia possibile, implicherebbe assegnare un'interpretazione al fattore $1 + x$ o al fattore $-1 - x$. Il primo non può essere interpretato perché non possiamo concepire di aggiungere nessuna classe $x$ alla classe universale 1; neppure il secondo è interpretabile perché il simbolo $-1$ non è sottoposto alla legge $x(1-x) = 0$ alla quale sono sottoposti tutti i simboli di classe. Pertanto l'equazione $x^3 = x$ non ammette interpretazione analoga a quella dell'equazione $x^2 = x$.

Comunque, se la prima equazione fosse vera indipendentemente dalla seconda, cioè se l'atto della mente denotato dal simbolo $x$ fosse tale che la sua seconda ripetizione (ma non la sua prima ripetizione, cioè la sua ripetizione pura e semplice) riproducesse il significato di un'operazione singola, saremmo presumibilmente in grado di interpretare una delle forme (3.10) o (3.11), cosa che invece non possiamo fare, date le condizioni effettive del nostro pensiero.[50]

Hailperin mostra il legame tra il rifiuto dell'espressione $x^3 = x$ e la restrizione presente sulla somma:

Avere $-1$ e $1 + x$ che soddisfano la legge generale $x^2 = x$ è equivalente ad avere $x + x = 0$.[51]

---

e supponendo che la stessa operazione possa essere effettuata $n$ volte, otteniamo:

$$x^n = x,$$

che è l'espressione matematica della legge affermata sopra.

[50] LT, p. 35.
[51] [9], p. 80.

Infatti se si analizzano le conseguenze dell'accettare l'interpretabilità di $-1$ e $1+x$ si trova che:

$$\begin{aligned}(-1)^2 = -1 &\to 1 = -1\\ &\to 1+1 = 0\\ &\to x+x=0, \text{ per ogni } x\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(1+x)^2 = 1+x &\to 1+x+x+x^2 = 1+x\\ &\to 1+x+x+x = 1+x\\ &\to x+x=0, \text{ per ogni } x\end{aligned}$$

L'equazione $x+x=0$, come vedremo nella sezione successiva, è ammissibile solo se $x=0$, perciò l'espressione $1+1$, data la restrizione sulla somma, è inaccettabile (sia che la s'intenda come uguale a 1 che come uguale a 0). Inoltre, in entrambi i casi l'implicazione è reversibile: eliminare la restrizione sulla somma significherebbe poter sommare senza contraddizioni la classe universo con se stessa, di conseguenza accettare l'interpretabilità di $-1$ e $1+x$, e quindi di $x^3=x$.

Questo, naturalmente, è discorso per assurdo: la restrizione è stata introdotta proprio per garantire l'interpretabilità di una somma generica $x+y$, dunque eliminarla, stante la nozione di interpretabilità, renderebbe interpretabile $x^3=x$, ma non la somma stessa.

Jevons non si sofferma su questi aspetti, non avrebbe mai accettato le fattorizzazioni di $x^3=x$ proposte da Boole (le equazioni (3.10) e (3.11) sono le scomposizioni rispettivamente di $x-x^3=0$ e di $x^3-x=0$) in quanto esse costituiscono un esempio di ciò che egli rifiuta: l'uso di operazioni tipicamente algebriche (come la fattorizzazione di un polinomio) che non hanno significato in logica.[52]

Tuttavia un discorso simile potrebbe essere considerato emblematico delle ripercussioni negative della restrizione. Questo ci porta all'ultima obiezione, argomento centrale di tutta la corrispondenza.

### 3.3.2 Legge di unità

Tra i miglioramenti del sistema di Boole, posti in atto da Jevons, che si sono rivelati fecondi per gli sviluppi successivi, un ruolo di primo piano è rivestito dall'interpretazione della somma $A+B$ in senso non esclusivo. Su questo principio si basa una delle leggi principali della logica secondo Jevons: la legge di unità, $A+A=A$, vale a dire: alternative uguali prese insieme hanno lo stesso significato di una qualsiasi di esse presa singolarmente.

Questa legge contraddice le basi del sistema di Boole, pertanto l'obiezione viene così formulata:

[52] Cfr. sezione 3.5.

> Il sistema del professor Boole è inconsistente con l'auto-evidente legge del pensiero, la legge di unità ($A + A = A$).

Questa obiezione è l'argomento principale della corrispondenza tra i due autori, ed è un punto talmente centrale da far scrivere a Boole, a seguito di una risposta telegrafica proprio su questo tema:

> Non le scrivo di più, non per riluttanza a discutere la materia con lei, ma semplicemente perché se noi discordiamo su questo punto fondamentale è improbabile che possiamo essere d'accordo sugli altri.[53]

Jevons sostiene l'evidenza della validità della legge di unità sia che la si consideri estensionalmente (se a tutti gli $x$ si aggiungono tutti gli $x$ si ottiene semplicemente un insieme formato da tutti gli $x$), che intensionalmente ($x$ oppure $x$ è certamente $x$).

Inoltre egli ritiene che essa rappresenti nell'estensione del significato ciò che la legge indice booleana rappresenta nell'intensione:

| | **Estensione** | **Intensione** |
|---|---|---|
| $x + x$ | Tutti gli $x$ aggiunti a tutti gli $x$ | $x$ oppure $x$ |
| $xx$ | Tutti gli $x$ selezionati tra tutti gli $x$ | ciò che è $x$ e $x$ |

Per questo motivo l'autore sostiene che la legge di unità sia almeno altrettanto ovvia della legge indice:

> [...], se noi prendiamo tutti gli $x$ non ne possono rimanere altri da aggiungere ad essi. Il secondo termine in $x + x$ è inoperativo tanto quanto il secondo fattore in $xx$.[54]

Jevons è persuaso della necessità di introdurre questa legge nel sistema di Boole per far sì che esso rappresenti una vera generalizzazione del processo di ragionamento. Tuttavia, come abbiamo letto nell'obiezione, essa appare inconsistente con il sistema di Boole. In realtà contraddice solo la peculiare notazione scelta, in particolare la restrizione sulla somma, che, in ogni caso, appare a Jevons inessenziale.

Jevons fa anche riferimento ad una proposizione del capitolo di LT sui metodi di abbreviazione, in cui Boole sembra riconoscere parzialmente la legge di unità. I metodi di abbreviazione [*methods of abbreviation*] sono dei principi che abbreviano il processo di eliminazione, rigettando, in presenza di particolari condizioni, termini di classe superflui. Consideriamo la Proposizione I di Boole:

[53] [7], p. 30.
[54] [7], p. 25.

> Da una qualsiasi equazione $V = 0$, nella quale V consiste di una serie di termini di classe aventi coefficienti positivi, noi siamo autorizzati ad escludere [*reject*] qualsiasi termine che contenga un altro termine come un fattore, ed eguagliare tutti i coefficienti all'unità.[55]

Il significato di V dipende solo dal numero e dalla natura dei costituenti del suo sviluppo finale, cioè del suo sviluppo rispetto a tutti i termini che include. Boole ipotizza che $x$ e $xy$ siano due termini qualsiasi della serie. Lo sviluppo di $x$ rispetto ai simboli $x$ e $y$ sarà:

$$1xy + 1x(1-y) + 0(1-x)y + 0(1-x)(1-y),$$

ed eliminando i coefficienti uguali a 0:

$$xy + x(1-y).$$

Lo sviluppo della somma dei termini $x + xy$ invece è:

$$2xy + 1x(1-y) + 0(1-x)y + 0(1-x)(1-y),$$

cioè:

$$2xy + x(1-y).$$

In entrambi i casi le equazioni risultanti saranno:

$$\begin{cases} xy = 0 \\ x(1-y) = 0 \end{cases}$$

ricordando che nello sviluppo si devono eguagliare separatamente a 0 tutti i costituenti che hanno un coefficiente diverso da 0 — non importa che sia 1 o 2. E poiché si ottiene lo stesso risultato, con queste particolari condizioni l'aggregato di termini $x + xy$ può essere rimpiazzato dal singolo $x$.

Jevons non lo esplicita, ma è chiaro che egli vorrebbe far rientrare $x + x$ in questo caso, considerato che $x$ contiene se stessa come fattore. In effetti Boole non ignora questa questione e aggiunge:

> Lo stesso ragionamento si applica a tutti i casi contemplati nella proposizione. Così se il termine $x$ è ripetuto [si intende $x + x$], l'aggregato $2x$ può essere sostituito da $x$, perché, date le condizioni, nella riduzione finale deve comparire l'equazione $x = 0$.[56]

È bene sottolineare che $x + xy = x$ e $x + x = x$ non sono leggi nel sistema di Boole, cioè non sono valide per ogni $x$ o $y$, così come in Jevons; esse sono uguaglianze che, date particolari condizioni, possono valere.

Jevons, per inciso, ha il merito di aver introdotto tra i principi dell'algebra booleana la Legge di assorbimento ($A + AB = A$):

[55] LT, p. 100.
[56] Ivi, p. 101.

> In un termine plurale, può essere rimossa ogni alternativa tale che una sua parte formi un'altra alternativa. Così il termine *o B o BC* è lo stesso che $B$ da solo, o $B + BC = B$. Poiché è una verità auto-evidente [per la legge di dualità] che $B$ stando da solo è o uguale a $BC$ o uguale a $Bc$. Così:
>
> $$\mathbf{B}+\mathbf{BC} = Bc + BC + BC = Bc + BC=\mathbf{B}.$$[57]

Questa legge dipende strettamente dalla legge di unità, pertanto Boole non avrebbe mai potuto inserirla tra l'elenco di leggi del suo sistema.

Abbiamo analizzato brevemente le argomentazioni di Jevons, vediamo cosa ha risposto Boole a questa obiezione. Egli ritiene che un sistema di logica basato sui principi sviluppati nel suo lavoro sia perfettamente coerente e non necessiti di un ulteriore principio; inoltre crede che Jevons nel proporgli di adottare la legge di unità abbia frainteso la differenza esistente tra interpretabilità di un'espressione ed interpretabilità di un'equazione:

> Mi permetta di sottolineare un errore in cui mi sembra sia caduto. L'interpretabilità dell'espressione $u$ e quella dell'equazione $u = 0$ sono cose totalmente differenti. L'espressione $u$, che si suppone essere una funzione di un simbolo di classe $x$, $y$, $z$ non è interpretabile se la condizione
>
> $$u(1 - u) = 0$$
>
> non è soddisfatta. L'equazione $u = 0$ è sempre interpretabile. Così l'equazione $x + x = 0$ è equivalente all'equazione $x = 0$, ma l'espressione $x + x$ non è equivalente all'espressione $x$. Il suo principio di unità non è applicabile alle espressioni. Nella misura in cui è realmente applicabile alle equazioni, esso esprime ciò che è già contenuto come una particolare parte della dottrina generale dell'interpretazione di equazioni tramite lo sviluppo.[58]

In una lettera successiva ribadisce, ancora più esplicitamente, che in logica non vale $x+x = x$, ma vale l'equivalenza tra $x+x = 0$ e $x = 0$. Ed aggiunge:

> Mi sembra che lei impieghi la sua legge di unità in due modi diversi. In uno è vera, nell'altro no.[59]

Vale a dire: la legge di unità non si applica alle espressioni perché non produce, secondo Boole, risultati corretti; essa, invece, è vera quando si applica all'equazioni, ma in questo secondo caso non risulta necessaria la sua introduzione perché è la dottrina dello sviluppo a garantirci che da $x+x = 0$ segue $x = 0$.

[57] PL, p. 26.
[58] [7], p. 26.
[59] Ivi, p. 30.

## 3.4 Metodi d'inferenza

Jevons, nel corso dell'opera, rapporta costantemente il suo sistema a quello di Boole e ne esplicita la superiorità:

> Confrontato con il sistema di Boole, nella sua veste matematica, questo sistema mostra i seguenti vantaggi:
>
> 1. ogni processo è di natura e forza auto-evidenti e governato da leggi tanto semplici quanto gli assiomi di Euclide;
> 2. il processo è infallibile e non fornisce risultati anomali o non interpretabili;
> 3. le inferenze possono essere condotte con molto meno lavoro di quello richiesto nel sistema del prof. Boole, che generalmente richiede un calcolo ed uno sviluppo particolare per ogni inferenza.[60]

Prima di discutere di questa pretesa superiorità, presentiamo la soluzione nel sistema di Jevons di un complesso esempio booleano.

### 3.4.1 Esempio: la definizione di bene

Il punto di partenza è la definizione di bene data da Senior:

> I beni consistono di cose trasferibili, disponibili in quantità limitate, e tali da produrre piacere o evitare il dolore.

Jevons, per formalizzare, assegna un simbolo ad ogni termine:

A= bene

B= trasferibile

C= disponibile in quantità limitata

D= che produce piacere

E= che evita il dolore

La definizione è espressa dalla proposizione:

$$A = BC(DE + De + dE),$$

che include tutte le combinazioni di *D, E, d, e* eccetto *de*: questo indica che si tratta di una disgiunzione inclusiva.

[60] PL, p. 74.

La definizione può essere espressa in maniera più concisa operando su essa tramite inferenza diretta, usando prima la proprietà distributiva:

$$A = BC(DE + De + dE) = BCDE + BCDe + BCdE,$$

ed eliminando, poi, il termine duale:

$$A = BCD(E + e) + BCdE = BCD + BCdE.$$

È possibile, inoltre, eliminare intrinsecamente $E$ ed ottenere:[61]

$$A = BCD + ABCd.$$

Per facilitare il confronto richiamiamo i primi passi della soluzione di Boole. È necessaria una nota sulla formalizzazione: useremo gli stessi simboli che usa Jevons in modo da marcare le affinità e le differenze, si manterrà tuttavia la convenzione adottata da Boole, secondo cui i termini si esprimono con le lettere minuscole, ed i loro contrari sottraendoli dall'universo. Dunque si avrà:

a= bene

b= trasferibile

c= disponibile in quantità limitata

d= che produce piacere

e= che evita il dolore

La definizione viene così espressa:

$$a = bc[d + e(1 - d)].$$

Da questa è possibile eliminare $e$:

$$\begin{gathered} a - bc[d + e(1 - d)] = 0, \\ (a - bc)(a - bcd) = 0, \\ a - abcd - abc + bcd = 0, \\ a(1 - bcd - bc) + bcd = 0, \\ a = \frac{-bcd}{1 - bcd - bc} = \frac{bcd}{bcd + bc - 1}. \end{gathered}$$

[61] La regola dell'eliminazione intrinseca prevede la possibilità di sostituire a qualsiasi parte di un membro di una proposizione l'intero dell'altro. Dunque se vale $A = B_1B_2 \dots B_n$, allora vale anche $A = AB_2 \dots B_n$ o $A = A \dots B_n$ — cfr. sezione 2.5.1 a pagina 19. Jevons non lo precisa, ma in questo caso utilizza un'estensione della suddetta regola: se vale $A = B_1B_2 \dots B_n + C_1C_2 \dots C_k + \dots$ allora vale $A = AB_2 \dots B_n + C_1C_2 \dots C_k + \dots$ o $A = B_1B_2 \dots B_n + A \dots C_k + \dots$ .

Sviluppo del secondo membro:

$$\begin{aligned}a =&1bcd+\frac{0}{0}bc(1-d)+0b(1-c)d+0a(1-c)(1-d)+0(1-b)cd+\\&+0(1-b)c(1-d)+0(1-b)(1-c)d+0(1-b)(1-c)(1-d).\end{aligned}$$

Da cui per la regola di interpretazione, si può concludere:

$$a = bcd + \frac{0}{0}bc(1-d).$$

Questa espressione è equivalente a quella ottenuta da Jevons eliminando $E$, entrambe, infatti, possono essere interpretate come: *I beni consistono nelle cose trasferibili, disponibili in quantità limitata e che producono piacere più alcune delle cose trasferibili, disponibili in quantità limitata che non producono piacere.*

Viene richiesta un'espressione per *ciò che è disponibile in quantità limitata* in funzione degli altri termini, vediamo come si ricava in Jevons. Bisogna, com'è noto, formare tutte le possibili combinazioni dei termini e dei loro contrari, che sono in totale $2^5 = 32$, e tra queste scartare, dopo un confronto con la premessa, le combinazioni contraddittorie. Tra i soggetti possibili bisogna poi selezionare le combinazioni contenenti $C$ (elenchiamo direttamente il risultato per non appesantire troppo l'esposizione):

$$\begin{aligned}C =&ABCDE + ABCDe + ABCdE + aBCde+\\&+abCDE + abCDe + abCdE + abCde.\end{aligned}$$

Questa espressione può essere semplificata tramite processi di inferenza diretta, come l'eliminazione dei termini duali e l'eliminazione intrinseca (che sarà indicata sottolineando il termine):

$$\begin{aligned}C &= ABCD(E+e) + ABCd\underline{E} + aBCd\underline{e} + abCD(E+e) + abCd(E+e) =\\&= AB\underline{C}D + ABCd + aBCd + abcD + abCd =\\&= ABD + (A+a)BCd + abC(D+d) =\\&= ABD + BCd + abC.\end{aligned}$$

Da quest'ultima si può anche ottenere:

$$C = ABD + aBCd + abC,$$

che interpretata è: *ciò che è limitato è o un bene trasferibile, che produce piacere o no* ($ABD$)*, o anche qualche tipo di cosa che non è un bene ma o non è trasferibile* ($abC$) *o se è trasferibile non produce piacere* ($aBCd$). Inoltre un'analisi delle combinazioni contraddittorie ci fornisce anche delle proposizioni secondarie. Infatti da:

1. $AbD = 0$,

2. $Abd = 0$;

si ottiene:

1. non esistono beni non trasferibili e che producono piacere,

2. non esistono beni non trasferibili e che non producono piacere.

Per trovare un'espressione per $c$, Boole prosegue isolando il termine richiesto dall'espressione $a - abcd - abc + bcd = 0$:

$$c = \frac{a}{ab + abd + bd}.$$

Successivamente si sviluppa il secondo membro:

$$\begin{aligned} c =& 1abd + 1ab(1-d) + \frac{1}{0}a(1-b)d + \frac{1}{0}a(1-b)(1-d) + 0(1-a)bd + \\ & \frac{0}{0}(1-a)b(1-d) + \frac{0}{0}(1-a)(1-b)d + \frac{0}{0}(1-a)(1-b)(1-d), \end{aligned}$$

e s'interpreta:

$$c = abd + ab(1-d) + \frac{0}{0}[(1-a)b(1-d) + (1-a)(1-b)d + (1-a)(1-b)(1-d)];$$

vale a dire: *Le cose disponibili in quantità limitata consistono di tutti i beni trasferibili, produttivi di piacere o meno; più una quantità indefinita di ciò che non è bene ma è o trasferibile e non produttivo di piacere o non trasferibile e produttivo di piacere o né trasferibile né produttivo di piacere.*

Il coefficiente $\frac{1}{0}$ ci permette di aggiungere le seguenti relazioni indipendenti:

1. non esistono beni non trasferibili e che producono piacere,

2. non esistono beni non trasferibili e che non producono piacere.

Come si può notare, le conclusioni a cui si giunge sono equivalenti.

### 3.4.2 Osservazioni

Con questo esempio, Jevons dimostra che il suo metodo logico è generale così come quello di Boole: le regole che governano le inferenze sono applicabili a qualsiasi numero di premesse comprendenti qualsiasi numero di termini. Aver raggiunto questo grado di generalità in logica è senza dubbio merito di Boole, e Jevons ne è consapevole, infatti leggiamo in [12]:

> [Boole] è stato il primo a evidenziare il problema della scienza logica nella sua completa generalità: *date alcune premesse o condizioni logiche, determinare l'espressione di una qualsiasi classe*

> *di oggetti sotto queste condizioni.* Questo è il problema generale che i logici antichi hanno risolto solo in pochi casi isolati — i diciannove modi sillogistici, il dilemma, il sillogismo disgiuntivo, e poche altre forme. Boole mostrò incontestabilmente la possibilità, grazie all'aiuto di un sistema di segni matematici, di ottenere le conclusioni di tutti questi antichi ragionamenti ed un numero indefinito di altre conclusioni.[62]

Dunque Jevons in PL mette a punto un sistema deduttivo equivalente a quello di Boole, almeno per quanto riguarda la *potenza* del calcolo — *conditio sine qua non* per poter aspirare ad un confronto.

Alla luce dell'esempio e di questa premessa è, inoltre, possibile commentare l'affermazione di Jevons circa la superiorità del suo sistema rispetto a quello di Boole. In questa sezione si farà riferimento in particolare al terzo punto, quello relativo all'*economia* del calcolo.[63]

Jevons ritiene che con il suo sistema si raggiunga un maggior grado di efficienza; il risparmio sarebbe insito nel metodo indiretto descritto nella sezione 2.5 a pagina 19: le operazioni di sviluppo e confronto vanno compiute una sola volta e coinvolgono tutti i termini. Successivamente la risoluzione di qualsiasi richiesta si ottiene tramite un semplice meccanismo di selezione: a partire dall'elenco stilato una volta per tutte, si ricavano le espressioni per tutti i termini, o combinazioni di termini, desiderati. In effetti nel sistema di Boole è necessario isolare il termine desiderato e sviluppare il secondo membro, ripetendo queste operazioni per ogni termine che si vuole esprimere, quindi il numero delle inferenze si moltiplica.

Tuttavia dall'esempio precedente, e dagli esempi riportati nella sezione 2.5.3, emerge anche un altro aspetto: le operazioni di sviluppo e confronto nel sistema di Jevons possono diventare lunghe e laboriose. Si è gia osservato che, all'aumentare del numero dei termini coinvolti nel problema, l'alfabeto logico cresce esponenzialmente. Quando ci sono più di 5 termini e più di una premessa, con cui confrontare tutte le combinazioni possibili, diventa davvero difficile giungere alla soluzione, nonostante Jevons mostri qualche tecnica ed espediente per facilitare il calcolo. Il procedimento potrà anche essere semplice, ma è estremamente macchinoso e monotono: un lungo lavoro compilativo. L'autore, consapevole di questo inconveniente, propone una soluzione:

> Potrebbero essere sollevate delle obiezioni contro questo processo di inferenza indiretta, che è lungo e tedioso; e lo è davvero, quando è applicato in questo modo. Veramente il tedio non è un valido argomento contro la verità; e se, come io credo fermamente, questo metodo ci dà la possibilità di risolvere un numero

[62][12], p. 143.

[63]Il secondo sarà discusso nella sezione 3.5 a pagina 71, mentre del primo si è parlato nella sezione 3.3 a pagina 54.

infinito di problemi, e giungere ad infinite conclusioni, che spesso non sono dimostrabili in una maniera più semplice, obiezioni di questo tipo non dovrebbero avere nessun peso. Il fatto comunque è questo: tutta la noia e la tendenza a sbagliare possono essere eliminate dal processo grazie all'uso di sussidi meccanici, che possono essere di vari tipi e gradi.[64]

In effetti Jevons mise a punto nel 1866 un *abaco logico* [*logical abacus*], che aveva principalmente una finalità didattica:

> Attraverso il suo uso [dell'abaco logico] le operazioni di classificazione e selezione, sulle quali si fonda la logica di Boole, e sulle quali ogni logica dovrebbe fondarsi, possono essere rappresentate; e la soluzione di un qualunque problema può essere mostrata ad una classe di studenti nella maniera più evidente possibile, in quanto ciascun passo per arrivare alla soluzione appare distintamente.[65]

Brevemente, l'abaco consiste di:

1. una lavagna inclinata con quattro prominenze orizzontali che fungono da mensole;

2. quattro serie di strisce piatte di legno, sulle quali sono riportate lettere, in questo modo:

   - 4 strisce del tipo $\boxed{\begin{matrix}\mathrm{A}\\\mathrm{B}\end{matrix}}$, ciascuna con una delle 4 combinazioni: $AB$, $Ab$, $aB$, $ab$;
   - 8 del tipo $\boxed{\begin{matrix}\mathrm{A}\\\mathrm{B}\\\mathrm{C}\end{matrix}}$, con le relative combinazioni;
   - 16 del tipo $\boxed{\begin{matrix}\mathrm{A}\\\mathrm{B}\\\mathrm{C}\\\mathrm{D}\end{matrix}}$, con le relative combinazioni;
   - 32 del tipo $\boxed{\begin{matrix}\mathrm{A}\\\mathrm{B}\\\mathrm{C}\\\mathrm{D}\\\mathrm{E}\end{matrix}}$, con le relative combinazioni.

[64] [13], p. 116.
[65] [12], p. 152.

Naturalmente la scelta del set di strisce da usare dipende dal numero di termini coinvolti nel problema; esse vengono disposte una accanto all'altra sulla mensola più alta.[66] Si opera sulle strisce manualmente, eliminando quelle che contraddicono le premesse. Per esempio se la premessa è $A = B + C$, si spostano dalla prima alla seconda mensola tutte le strisce che contengono $A$, tra queste vengono riportate sulla prima mensola quelle che contengono $B$, e successivamente quelle che contengono $C$. Dopo queste operazioni quelle che rimangono sulla seconda mensola sono le combinazioni che contraddicono la premessa e vanno posizionate sulla mensola più bassa. E così via per ogni premessa. Alla fine le combinazioni rimaste sulla prima mensola sono le combinazioni possibili e a partire da queste si può esprimere qualsiasi termine desiderato.

Lavorare in questo modo è molto istruttivo, perché ogni passo è chiaramente visibile ed inoltre possono essere portati a termine problemi complessi che la mente non riuscirebbe a risolvere senza l'aiuto di un sussidio meccanico. Il processo di selezione operato in questo modo ha l'indubbio vantaggio di essere chiaro ed evidente, ma non è certo immune da errori. Jevons, allora, nel 1870 sviluppò una vera e propria *macchina logica* [*logical machine*] nella quale le selezioni vengono fatte meccanicamente, e dunque impeccabilmente:

> Un congegno meccanico [*mechanical contrivance*], nel quale le strisce-combinazioni dell'abaco non hanno bisogno di essere mosse con le mani, ma possono essere posizionate nel giusto ordine operando su una serie di tasti e maniglie. Ho anche costruito un modello ben funzionante di questa invenzione, che può essere considerata una *macchina capace di ragionare* [*machine capable of reasoning*], o di sostituire interamente l'azione della mente nello stilare inferenze.[67]

La macchina logica o *logic piano* è dunque il culmine di una serie d'invenzioni per eseguire calcoli logici: alfabeto logico, lavagna logica e abaco logico, di cui è stata fornita una breve descrizione.

La macchina, costruita da Jevons per uso personale nel 1869 e custodita nel Museo della Storia della Scienza ad Oxford, è limitata a risolvere problemi contenenti quattro termini, sebbene inferenze di questo tipo possano anche essere svolte manualmente; egli progettò anche una macchina a dieci termini, ma non la realizzò perché, scrive, una macchina simile avrebbe occupato un'intera parete del suo studio. La macchina logica consiste di una grande cassa di legno, con una tastiera montata sulla parte frontale — da questo particolare viene il nome 'logic piano'. Le espressioni logiche vengono

[66] Jevons sottolinea che l'ordine in cui le strisce vengono posizionate è indifferente, però suggerisce per motivi di chiarezza di posizionare le combinazioni positive sulla sinistra delle corrispondenti negative. In termini moderni si direbbe che la disposizione delle strisce si ottiene con il metodo della dicotomia.

[67] [13], p. 120.

'tradotte' premendo sulla tastiera i tasti corrispondenti ad ogni lettera ed ai segni di operazione (esistono 8 tasti che contengono le lettere formanti il soggetto ed 8 per il predicato, oltre a questi ci sono due tasti `OR`, a seconda che la disgiunzione compaia nel soggetto o nel predicato, e il tasto `IS`, per la copula), alla fine di ogni proposizione si preme il tasto `FULL STOP`; il tasto `FINISH` è usato invece per terminare il problema e resettare la macchina. La pressione su questi tasti avvia un semplice meccanismo di leve e piccole carrucole, che producono ciò che in termini moderni si definirebbe un *output*, visibile esternamente su una struttura che funge da supporto per talloncini di lettere mobili. Questi possono assumere posizioni diverse, in particolare se rappresentano una combinazione contraddittoria ruotano di 180 gradi e non sono più visibili. Dunque alla fine del problema saranno visibili sullo 'schermo' solo le combinazioni consistenti con le premesse digitate e, per esempio, premendo il tasto $A$ si potranno selezionare tra quelle tutte e sole le combinazioni contenenti $A$.

Dunque la macchina non fornisce una conclusione sotto forma di proposizione; Jevons lavorò senza successo a questo difetto che rendeva necessario l'intervento umano:

> La macchina non sostituisce del tutto un agente pensante [*mental agency*], tuttavia lo sostituisce nei passi principali del processo.
>
> [...]
>
> Un agente pensante è necessario solo per la corretta interpretazione della struttura grammaticale delle premesse, e per cogliere dalle lettere dell'abaco il significato della risposta. Il processo intermedio di deduzione è effettuato materialmente [*in a material form*].[68]

Alla fine della computazione la macchina presenta le combinazioni possibili, a partire dalle quali si può ricavare la descrizione di una classe qualsiasi elencando come alternative tutte le combinazioni che contengono il termine desiderato.

Come si è visto dall'esempio, la proposizione così ottenuta può essere semplificata tramite inferenza diretta; tuttavia l'applicazione delle regole di inferenza diretta per semplificare le espressioni è poco immediata e spesso non intuitiva. Jevons sembra esserne consapevole perciò sottolinea:

> La riduzione di inferenze ai loro minimi termini, dev'essere sottolineato, non è in alcun modo essenziale per la loro verità, essa le rende solo più ricche di informazioni. Questa è, forse, l'unica parte del processo in cui vi è qualche difficoltà.[69]

[68] [12], p. 169.
[69] PL, p. 68.

Questa pecca emerge ulteriormente se si confrontano queste regole d'inferenza con i processi logici algebrici di cui parla Boole: riduzione di più premesse ad una ed eliminazione di termini qualsiasi in qualsiasi ordine da un'espressione. Questi sono processi rigorosi, la cui validità è dimostrata e soprattutto sono standardizzati nello loro applicazione.

Si può concludere che il sistema di Jevons non è certo globalmente meno dispendioso di quello di Boole. I due procedimenti, come si è visto nella sezione 3.1.3 a pagina 39, sono sostanzialmente identificabili. Il metodo di Jevons è perfettamente leggibile in termini booleani (l'alfabeto logico corrisponde all'universo del discorso, le combinazioni — incluse, escluse, contraddittorie — ai coefficienti dello sviluppo etc.), in alcuni casi però risulta più 'viscoso'. Leggiamo in Geymonat:

> Come osserva il Lewis, "nel suo complesso i metodi di Jevons corrono facilmente il rischio di essere noiosi e non possiedono certo nitore matematico. Supponiamo ad esempio di avere tre equazioni contenti in tutto sei termini. L'alfabeto logico consisterebbe di 64 combinazioni, ognuna delle quali andrebbe separatamente provata per ogni equazione, dando così luogo a 192 operazioni separate. Jevons ha enfatizzato la sua differenza da Boole al punto di rifiutare molto di quanto avrebbe fatto meglio a mantenere.".[70]

Ciò che ha rifiutato è, come l'autore stesso lo definisce, l' "abito matematico" [*mathematical dress*] che rivestiva il sistema di Boole; questo ci porta ad uno degli snodi principali del confronto: il rapporto fra logica e matematica.

## 3.5 Relazione fra logica e matematica

Grattan-Guinness distingue due tradizioni nell'interazione fra logica e matematica: la tradizione algebrica, che include Boole e De Morgan; e la tradizione matematica di Peano e Russell.

Boole presentò per la prima volta un sistema algebrico — comprendente un sistema di segni ed operazioni classiche come somma, prodotto etc. — suscettibile di una duplice interpretazione: puramente logica (interpretando le variabili come simboli di classe o come proposizioni) e matematica (le variabili assumono valori numerici $\in \{0, 1\}$). La strada era quella inaugurata dagli algebristi di Cambridge del XIX secolo: la costruzione di un'algebra simbolica che trattasse algebricamente sistemi di enti non ulteriormente determinati, svincolando così il momento astratto da quello interpretativo, e rovesciasse la prospettiva tradizionale: l'interpretazione segue, e non precede, le operazioni dell'algebra.

Mosselmans ritiene che Jevons occupi una posizione ambigua all'interno della storia della logica:

[70][14], p. 131.

> Egli tenta di fondare la matematica sulla logica, ma la forma della sua logica è ispirata alla tradizione algebrica di Boole e De Morgan.[71]

Jevons in effetti, come abbiamo visto, fonda il suo sistema su quello di Boole e riprende l'analogia booleana tra le operazioni della mente, e le relative leggi, e le operazione algebriche. Si consideri la seguente tabella:

| **Proposizioni logiche** | **Equazioni matematiche** |
|---|---|
| I termini noti ammettono:<br>Combinazione<br>Separazione<br>(se nessun dividendo contiene il divisore) | I numeri noti ammettono:<br>Moltiplicazione<br>Divisione<br>(se il dividendo è $\neq 0$) |
| I termini ignoti ammettono:<br>Combinazione<br>ma non ammettono:<br>Separazione | I numeri ignoti ammettono<br>Moltiplicazione<br>ma non ammettono:<br>Divisione |

Tabella 3.1: Corrispondenza tra logica e matematica

Questa tabella mostrerebbe, secondo Jevons, l'esistenza di una piena corrispondenza tra logica e matematica:

> [...], potremmo dire che la logica è l'algebra della qualità, il calcolo delle qualità note e ignote, così come l'algebra è il calcolo delle quantità note e ignote.[72]

Successivamente Jevons sembra abbandonare l'idea di una piena aderenza. La legge di unità $A + A = A$ rivela un'analogia imperfetta tra matematica e logica, ad essa, infatti, dovrebbe corrispondere $x + x = x$, dove $x$ indica una quantità. Jevons espliciterà questa riflessione nell'opera *The Principles of Science* ed userà nei suoi successivi lavori di logica un simbolo diverso per rappresentare proposizioni disgiuntive: $\cdot|\cdot$. Questo simbolo corrisponde alle parole 'e' ed 'o' del linguaggio naturale, che denotano alternative esclusive o inclusive. Il nuovo simbolo, $\cdot|\cdot$, gode delle stesse proprietà di +:

$$A \cdot|\cdot B = B \cdot|\cdot A,$$

ma ha il vantaggio di distinguersi marcatamente dal segno di addizione. La sostituzione di + con $\cdot|\cdot$, comunque, non elimina il problema di un'analogia imperfetta tra logica e matematica. In ogni caso in PL sostiene ancora una perfetta analogia, mostrando anche di non comprendere perché Boole parli

[71] [15], p. 85.
[72] PL, p. 7.

di una breccia in questa corrispondenza (relativa al fatto che i termini logici sono soggetti ad una legge ulteriore: la legge di dualità).

Nonostante sia evidente la matrice booleana del discorso sull'analogia tra logica e matematica, Jevons è un avversario del "matematismo" di Boole, egli vuole costruire una "logica pura", che si avvicini il più possibile alla logica del pensiero comune. Per questo motivo rifiuta coefficienti numerici diversi da 0 e 1, operazioni inverse come sottrazione e divisione, passaggi non interpretabili e tutto ciò che ha una dubbia interpretazione logica; inoltre, sceglie una notazione chiara e vicina al linguaggio ordinario.

Questa scelta secondo l'autore rappresenta complessivamente un vantaggio, e tra i motivi della superiorità del suo sistema rispetto a quello di Boole Jevons inserisce:

> Il processo è infallibile e non fornisce risultati anomali o non interpretabili.[73]

In effetti nel suo calcolo non si perde mai il contatto con l'interpretazione logica: i passaggi non sono altro che una traduzione nel linguaggio dei simboli di un ragionamento.

Questo non avviene nel sistema di Boole, i processi algebrici rappresentano una sorta di 'scatola nera' all'interno della quale le espressioni perdono il loro significato logico per poi recuperarlo alla fine. Jevons scrive:

> Boole parte da nozioni logiche e da auto-evidenti leggi del pensiero, poi improvvisamente trasforma le sue formule in oscure controparti matematiche e dopo varie manovre intricate, arriva a certe forme corrispondenti alle forme a cui si arriva direttamente ed intuitivamente con la logica pura o ordinaria.[74]

Boole affronta questo discorso nel quinto capitolo di LT: egli riconosce che nelle applicazioni ordinarie della ragione si ha una costante intelligibilità; ma se questo vincolo venisse esteso anche al processo simbolico, esso perderebbe il suo vantaggio, o meglio questo vantaggio consisterebbe solo nel "guadagno meccanico" rappresentato dalla possibilità d'impiegare simboli brevi e convenienti al posto di intere parole più ingombranti. Dunque nulla deve inficiare la generalità del ragionamento simbolico, la sua unica condizione di validità è la necessità di un'interpretazione ben definita per i simboli usati, inoltre il risultato finale che esprime la conclusione simbolica dev'essere interpretabile; non si richiede l'interpretabilità dei passi intermedi.

> Succede questo nel mio sistema di logica: tutti i passaggi sono interpretabili in un'altra sfera del pensiero, quella dell'algebra; ma non è affatto essenziale. L'espressione $1 + 1$ (quando 1 rappresenta l'universo) può essere considerata come ininterpretabile,

[73] Ivi, p. 74.
[74] Ivi, p. 86.

> come certamente è nella logica pura, invece di, come nella mia reale procedura, trasferirla nel parallelo schema di numeri e poi (interpretando 1 come unità) interpretarla come 2. E considerandola come non interpretabile noi possiamo lo stesso lavorare attraverso queste forme fino alla soluzione desiderata. Si ricorderà, inoltre, che noi abbiamo sempre il potere, grazie al teorema di sviluppo di ritornare alla sfera della logica pura.[75]

Jevons, con il suo lavoro, mostra che è possibile inferire logicamente facendo sì che non compaiano espressioni trascendenti i limiti della notazione — cioè tutte le espressioni sono interpretabili. Lo stesso Boole, in una lettera, fa cenno ad un tentativo di semplificazione del suo lavoro precedente:

> Ho messo da parte un lavoro su questo argomento che ho scritto circa due anni fa. Non posso in questo momento metterci mano, ma ricordo che esso include l'applicazione d'istruzioni tali da rendere le operazioni elementari sempre interpretabili nel linguaggio ordinario.[76]

Inoltre Jevons, sempre con l'intenzione di eliminare le "troppo ardite analogie con la matematica", sostituisce i procedimenti algebrici di soluzione booleani (che si servono di sottrazione, addizione, divisione) con una serie di regole, che non possono definirsi algebriche, ma sono chiaramente algoritmiche e non richiedono comprensione o intuito nell'applicazione.

Jevons, nella sua ricerca "dogmatica"[77] della logica naturale, rinuncia anche ad aspetti positivi del lavoro di Boole e, per quanto riguarda la formalizzazione ed il rapporto con l'algebra, il suo sistema rappresenta senza dubbio una regressione.

Escludendo queste differenze procedurali, il sistema di Jevons complessivamente è tratto dai lavori di Boole e del suo maestro De Morgan; nonostante ciò non lo si può inserire nella tradizione algebrica, in quanto questo filone ha un atteggiamento opposto al suo nei confronti del rapporto tra logica e matematica: la logica è una branca della matematica e deve 'matematizzarsi' per aspirare ad un grado maggiore di scientificità.[78] Jevons, sebbene la sua logica non abbia nessun rapporto con la tradizione che fa capo a Russell o Peano, tenta, invece, di fondare la matematica sulla logica:

> [...], si potrebbe inferire, non che la logica sia una parte della matematica, come sembrano voler dire gli scritti del prof. Boole, ma che, piuttosto, la matematica è derivata dalla logica. Tutte le

[75] [7], p. 26.
[76] Ibidem.
[77] [14], p. 131.
[78] Cfr. [19], p. 27.

> interessanti analogie tra il ragionamento logico e quello matematico che possono essere evidenziate, verrebbero di certo ribaltate se si rendesse la logica dipendente dalla matematica.[79]

Il legame tra ragionamento logico e ragionamento numerico è, secondo l'autore, innegabile; esiste una profonda analogia che può essere vista nella giusta luce solo se si considera la logica come la scienza fondamentale (*scientia scientiarum*), sulla quale la matematica si fonda. Questo tentativo si basa su una peculiare teoria del numero e dell'unità, che si cercherà brevemente di descrivere.

Jevons tenta di definire il numero come una somma di 'unità', che vengono contate nello spazio e nel tempo. Si potrebbe pensare che le unità siano perfettamente identiche tra loro, per esempio 3 mele sono tre unità poiché ciascuna ha le stesse qualità dell'altra. Invece, secondo l'autore, la verità è l'opposto di questa: le unità sono unità in quanto sono contrarie logicamente.

> Se ci fossero 3 mele, o 3 cose qualsiasi, così perfettamente uguali da non scorgere le differenze, allora esse sarebbero una cosa sola, proprio come afferma la legge di unità, $A + A + A = A$.[80]

Nella realtà non ci possono essere due cose uguali sotto tutte le qualità, perché, in un ultima istanza, a distinguerle c'è sempre la loro posizione spazio-temporale (anche cose perfettamente identiche, come i rintocchi di un pendolo, vengono distinte grazie al fatto che una viene prima o dopo l'altra nel tempo). Ed è proprio questa distinzione che ci permette di considerare le singole cose come unità e contarle.

> Per esempio, in $A(1'+1''+1''') = A'+A''+A'''$, il significato delle unità in parentesi è che ognuna è qualcosa di logicamente distinto dall'altra, e quando si predica di ciascuna di esse $A$, diciamo una mela, si ottengono 3 distinte $A$.[81]

Dunque, secondo Jevons l'intera scienza dei numeri vale solo sotto una condizione imposta dalla logica: le unità devono essere alternative logiche contrarie; mentre la logica, che è la scienza più generale, si occupa di alternative di cui non è noto se siano contrarie o meno e riduce all'unità le alternative conosciute come identiche.

Alla luce di questa teoria, che non è priva di ambiguità, si comprendono meglio due convinzioni di Jevons di cui si è parlato:

- Gli assiomi di addizione e sottrazione sono validi sono nel sistema dei numeri, in cui è presente la restrizione sulle alternative; pertanto non sono operazioni logiche.

[79] PL, p. 3.
[80] Ivi, p. 79.
[81] Ibidem.

- Il sistema di Boole, accettando tra i suoi fondamenti la restrizione, non rispetta le condizioni di una "pure logic".

Per questi motivi, nonostante l'ammirazione per il lavoro del collega, Jevons ritiene che sia necessario costruire un nuovo sistema:

> Supponendo che il calcolo di Boole non sia affatto logica; che sia fondato su una condizione che non appartiene al pensiero in generale, ma solo al pensiero numerico; e che esso ignori una legge della logica, la legge di unità, che distingue un sistema logico da uno numerico — questi errori a stento sottraggono bellezza ed originalità alla concezione da lui aperta.[82]

[82] PL, p. 87.

# Conclusione

Può essere utile richiamare brevemente l'obiettivo di questo lavoro: comprendere il ruolo e la portata della riflessione di Jevons, tramite un'analisi del suo sistema logico ed una lettura critica delle sue osservazioni sul sistema di Boole. Prima di addentrarci nell'esposizione dei risultati è necessaria una breve premessa metodologica — e cautelativa: le ricostruzioni a posteriori possono risultare poco convincenti; si è cercato pertanto, nel delineare il confronto, di evitare di parlare in termini di miglioramento o regressione. Lo scopo è stato quello di analizzare le singole argomentazioni soffermandosi sul contenuto e sulle giustificazioni addotte per ogni passaggio, sottolineando intuizioni e meriti, ma anche, laddove necessario, incorenze e mancanza di chiarezza.

Come è emerso dall'analisi condotta, Jevons non riesce a mettere a punto un sistema che costituisca una reale alternativa a quello di Boole, sarebbe dunque sterile e ridondante in fase di conclusione contrapporre i due sistemi considerandoli globalmente. Può essere interessante, invece, un resoconto che si concentri sulle singole proposte di modifica di Jevons al sistema di Boole. Esse sono state analizzate dettagliatamente, rilevandone l'acutezza ed anche i limiti. È possibile stilare un bilancio di tale analisi, un bilancio che non può non tenere conto della storia della logica successiva a Jevons.

Elencheremo dapprima le proposte più lucide e coerenti, che si sono poi anche rivelate le più feconde:

1. interpretazione della somma come operazione totale;
2. introduzione della Legge di unità ($A + A = A$) e della Legge di assorbimento ($A + AB = A$) tra le proprietà dell'algebra;
3. eliminazione delle operazioni inverse di sottrazione e divisione;
4. interpretabilità del processo in ogni passo;
5. eliminazione di coefficienti numerici diversi da 1 e 0.

Tra queste la più significativa è la prima, ad essa sono legate le altre quattro. L'eliminazione della restrizione booleana sulla somma — che implica la distinzione tra l'addizione come operazione aritmetica e l'addizione logica —

è stata accettata da tutti i logici successivi (a partire da Peirce e Schröder) e, tuttora, l'operazione di unione booleana ($A \cup B$) è un operazione totale, rappresenta cioè la somma inclusiva. La possibilità di sommare classi non disgiunte (e quindi, come caso limite, anche classi coincidenti) ha permesso d'inserire tra gli assiomi dell'algebra due nuove leggi: quella che Jevons chiama Legge di unità, che costituisce la simmetrica della Legge indice booleana ($A \cdot A = A$), e la Legge di assorbimento. Esse, più in generale, sono presenti tra le proprietà che rendono un insieme di termini ed operatori binari ($\otimes$ e $\oplus$) un'algebra di Boole:

**Leggi di tautologia o di idempotenza:** $a \otimes a = a$; $a \oplus a = a$.

**Leggi di assorbimento:** $a \otimes (a \oplus b) = a$; $a \oplus (a \otimes b) = a$.

Inoltre rimpiazzando le operazioni fondamentali di Boole con operazioni totali ed eliminando le operazioni inverse, Jevons ha garantito l'interpretabilità di ogni termine e di ogni passaggio; restringendo le operazioni sulle classi a quelle che usiamo oggi, cioè unione, intersezione e complemento.

Consideriamo ora i limiti del sistema proposto da Jevons, le proposte che non hanno avuto seguito:

1. prospettiva intensionale;
2. calcolo esclusivamente interpretabile come calcolo delle classi;
3. totale espulsione della matematica dai processi.

Il sistema proposto in PL è una "logica delle qualità" [*logic of quality*], questa interpretazione, oltre ad essere scarsamente giustificabile — e giustificata —, è meno fertile della prospettiva estensionale. Come è stato sottolineato, tuttavia, l'intero calcolo è agevolmente interpretabile come calcolo delle classi. Questa rimane l'unica interpretazione possibile, è del tutto assente, infatti, un riferimento alla logica delle proposizioni; dopo un'attenta lettura di PL è possibile senz'altro affermare che Jevons non coglie l'importanza della "doppia interpretazione" booleana. Ricordiamo che l'algebra logica proposta da Boole è un calcolo che, con un'opportuna interpretazione, può valere sia per la logica dei termini che per quella delle proposizioni (oltreché per l'algebra numerica avente come dominio {0,1} - aritmetica binaria). Il vantaggio è quello di comprendere queste due branche della logica in un unico metodo generale. L'intuizione di Boole è fondamentale, tuttavia la sua sistemazione non è definitiva: successivamente l'ordine di dipendenza fra calcolo delle classi e calcolo delle proposizioni sarà invertito, dimostrando la priorità logica del secondo rispetto al primo (Peirce, Frege); ed inoltre sarà introdotta una nuova notazione per estendere l'algebra di Boole ad un'algebra delle relazioni (De Morgan, Peirce, Schröder). Questa sarà una delle direttrici della revisione del sistema di Boole del tutto indipendente dall'opera di Jevons.

In secondo luogo, il rifiuto da parte dell'autore di qualsiasi procedimento matematico, come è emerso, appesantisce il calcolo e lo costringe a trasformarsi in una serie di algoritmi ripetitivi. Di certo Jevons ha avuto il merito di sottolineare gli aspetti negativi del 'matematismo' booleano, come la non-interpretabilità dei passaggi intermedi o l'analogia forzata tra le operazioni inverse, ma ne ha rifiutato anche aspetti positivi e semplificanti. I logici successivi, a partire da Venn, supereranno questa rigidità, consci del potere generalizzante del formalismo.

In questo lavoro si è cercato di analizzare la prima tappa dell'opera di revisione che ha trasformato l'algebra di Boole nella moderna algebra booleana, cioè il passaggio Boole-Jevons. Ulteriori sviluppi potrebbero derivare da un'analisi che coinvolga le riflessione degli altri protagonisti di questa fase (Venn, Peirce, Schröder, Huntington), che consenta di comprendere nel dettaglio l'influenza delle concezioni di Jevons ed il suo ruolo un passaggio così importante per la storia della logica. Da una ricerca di questo tipo potrebbe emergere una tendenza a 'superare' alcuni aspetti del sistema di Jevons, tuttavia si può aggiungere che tale superamento non sempre è stato un ritorno a Boole; questo dimostra che Jevons, nonostante in alcuni casi non abbia trovato la giusta soluzione, ha sollevato problemi non più trascurabili, contribuendo, con la sua riflessione, al pieno sviluppo dell'algebra logica come dottrina scientifica.

# Appendice

# Il *logic piano* e i moderni computer

> Il *logic piano* di Jevons anticipa l'informatica contemporanea in una duplice maniera.
>
> [...]
>
> La principale eredità di Jevons nella storia dell'informatica è la sua meccanizzazione della logica booleana, un aspetto-chiave dei computer contemporanei. Inoltre è ragionevole affermare che Jevons sia una delle figure-chiave della riformulazione della logica di Boole nell'algebra booleana.[83]

Si può ritenere di aver illustrato nel corso del lavoro in che maniera, ed in che misura, Jevons abbia contribuito a trasformare l'algebra di Boole nell'algebra booleana moderna, che è alla base del funzionamento dei circuiti elettronici digitali, e quindi dei computer. In questa breve appendice si cercherà di analizzare l'altro termine del rapporto tra Jevons e l'informatica: costruendo una macchina logica basata sul suo sistema d'inferenza, Jevons è stato il primo a 'meccanizzare' un'algebra di Boole; per questo motivo il *logic piano* è stato considerato un proto-computer. Si analizzerà la portata di questo contributo, valutando analogie e differenze, e suggerendo infine la necessità di un ridimensionamento dei termini di questo paragone se si vuole che l'analogia sia qualcosa di più di una semplice suggestione.

Jevons progetta e costruisce la prima macchina logica nel 1870, meccanizzando un'invenzione precedente, l'abaco logico. Per quanto riguarda il fine didattico, quello cioè di rendere chiaro e visibile lo schema inferenziale ad una classe di studenti di logica, l'abaco logico[84] appare più congeniale della macchina logica. Inoltre quest'ultima risolve problemi che coinvolgono

[83][2].

[84]Cfr. sezione 3.4.2 a pagina 66.

al massimo quattro termini, cioè problemi che possono anche essere risolti su carta. In altre parole, non ha certo una stringente utilità pratica — tralasciando, come non significativo, lo sgravio nella procedura inferenziale; la sua importanza è di tipo teoretico: essa dimostra che i problemi di logica possono essere risolti in maniera meccanica. In effetti questo risultato era già stato raggiunto dal *Demonstrator*, inventato da Charles Earl Stanhope (1753-1816), uno strumento estremamente semplice in grado di risolvere i tradizionali sillogismi (ed anche sillogismi numerici). Jevons, cogliendo questo suggerimento, progettò un congegno in grado di risolvere problemi più complessi (con un numero qualsiasi di premesse e — potenzialmente — con un numero qualsiasi di termini).

> Essa [la macchina logica] dimostra in maniera convincente l'esistenza di un sistema onnicomprensivo [*all-embracing*] di Inferenza Indiretta, sulla cui esistenza non si confidava prima che apparissero gli scritti logici di Boole.[85]

Si può dire che Jevons estese l'applicazione delle macchine logiche così come Boole aveva esteso la logica stessa, mettendo a punto una teoria generale dell'inferenza. Jevons addebita l'incapacità dei logici, fino ad allora, di costruire efficaci congegni meccanici (a differenza di ciò che era successo per il calcolo aritmetico) alla mancanza di una dottrina compiuta che fungesse da supporto. La dottrina attesa era il sistema logico di Boole.

> È stato quando abbiamo fondato i nostri sistemi sulle fondamentali leggi del pensiero che siamo arrivati ad un sistema di deduzione che potesse essere incorporato in una macchina che funziona con movimenti semplici ed uniformi. Questo grande passo avanti nella dottrina logica è dovuto a George Boole.[86]

Il *logic piano* di Jevons è, infatti, una meccanizzazione dell'algebra booleana, ed è questa caratteristica che ha fatto pensare ad esso come ad un antesignano dei moderni computer. Consideriamo i termini di quest'analogia, evidenziando caratteristiche comuni alla macchina logica e ai moderni computer:

1. dispositivo di input/output;
2. procedere binario, basato su operatori logici;
3. scomposizione di istruzioni complesse in una serie di operazioni semplici.

Nell'analisi di questi elementi si farà riferimento esclusivamente al *logic piano*, assumendo che queste siano caratteristiche senz'altro attribuibili ad un

[85] [12], p. 171.
[86] Ivi, p. 142.

computer. La macchina logica è in grado di riconoscere dei dati che vengono immessi come input e di fornire, a partire da essi, un output.

> Essa è una macchina analitica di carattere molto semplice, che esegue un'analisi completa di qualunque problema logico impresso su di essa. Semplicemente trascrivendo le premesse o dati di un problema su una tastiera che rappresenta termini, congiunzioni, copula e fine di una proposizione, la macchina esegue un confronto tra queste premesse e restituisce qualsiasi conclusione che può essere logicamente inferita da esse.[87]

L'immissione dei dati è effettuata tramite la successiva pressione di tasti presenti sulla tastiera: ci sono tasti che rappresentano termini (es. `A`, `a`, `B`, `c`) e tasti che rappresentano i connettivi logici (es. `OR`); grazie ad essi, e al tasto che indica la copula (`IS`), è possibile riportare un insieme di premesse qualsiasi. L'output consiste nella comparsa sullo 'schermo' dell'elenco delle combinazioni di termini che non contraddicono le premesse. Quello che impropriamente chiamiamo schermo è in realtà un pannello, collegato alla tastiera e posizionato sulla parete, caratterizzato dalla presenza di stringhe di combinazioni composte da lettere mobili, che ruotano — azionate da movimenti meccanici — di 180° e 'spariscono' dalla vista se la combinazione è contraddittoria.

La macchina logica, inoltre, procede in maniera binaria: per ogni termine del problema ci sono due, e due sole, posizioni possibili ($A$ e non-$A$, cioè $a$). Jevons non parla di 1 e 0 come possibili valori (a causa della sua 'avversione' per il matematismo booleano), ma si può dire, per analogia con le moderne variabili booleane, che ciascun termine coinvolto nel problema possiede un determinato valore di verità. La macchina contiene delle istruzioni per eseguire meccanicamente semplici operazioni logiche, che corrispondono agli operatori booleani di base:

`NOT`: non esiste un tasto di questo tipo, ma la presenza dei contrari semplici per ogni termine garantisce la possibilità di inserire direttamente il negato.

`AND`: per effettuare un'operazione di prodotto logico, o congiunzione, è sufficiente premere successivamente i tasti corrispondenti ai termini che si vogliono combinare; dunque `A`, `B`, `c` produrrà la combinazione $ABc$.

`OR`: il tasto corrisponde all'operazione di somma logica, premendo successivamente i tasti `A`, `OR`, `B` si ottiene un input corrispondente all'espressione logica: $A + B$.

Effettivamente, infine, il *logic piano* presenta una somiglianza strutturale con le moderne tavole di verità, la macchina infatti procede scomponendo

[87] Ivi, p. 144.

espressioni complesse in una combinazione di passaggi semplici basati sulle operazioni suddette. Le combinazioni visibili sullo schermo al termine del procedimento corrispondono alle righe aventi come valore logico 1 nella colonna-risultato delle tavole di verità.

> Le parti della macchina contengono le condizioni del corretto pensare; ci sono tante strisce di legno quante ne richiede la Legge di dualità per far sì che siano rappresentate tutte le combinazioni di qualità concepibili. Nessuna striscia contravviene alla Legge di contraddizione rappresentando allo stesso tempo termini inconsistenti tra loro; e va sottolineato che anche i caratteri peculiari dei simboli logici espressi nelle leggi di semplicità e di commutatività vengono conservati nell'azione dei tasti e delle leve. La macchina è, così, la reificazione [*embodiment*] di un vero metodo, o Calcolo, simbolico.[88]

Per quanto possa essere pregnante quest'analogia comportamentale, le differenze rimangono macroscopiche:

1. natura meccanica dei processi;
2. procedere esclusivamente combinatorio, assenza di memoria;
3. elaborazione logica come fine e non come mezzo.

Il processo della macchina logica è esclusivamente meccanico (basato sull'azione di tasti, leve, carrucole), ed è ben lungi dalla struttura circuitale che caratterizza i moderni computer. Non è il caso di soffermarsi oltre su questa evidentissima differenza, da cui dipendono discrepanze abissali per quanto riguarda la velocità, la potenza del calcolo e la dimensione delle componenti. Basti solo pensare che, allo stato attuale della tecnologia, è possibile integrare in un unico componente di pochi $cm^2$ diversi milioni di porte logiche; mentre Jevons dovette rinunciare alla costruzione di una macchina a 10 termini perché avrebbe occupato il suo intero studio.

Del tutto assente nella macchina logica costruita da Jevons è l'aspetto sequenziale, con i relativi operatori di scorrimento delle stringhe di dati, fondamentali per immagazzinare ed eseguire lunghe sequenze di istruzioni. Ricordiamo che l'hardware dei calcolatori è costituito da circuiti digitali (o reti logiche), che possono essere di due tipi: reti combinatorie e reti sequenziali. La differenza tra le due classi viene espressa in questi termini: le reti combinatorie sono reti per cui le uscite dipendono solo dagli ingressi; mentre le reti sequenziali sono reti per cui le uscite dipendono sia dagli ingressi che dallo stato del sistema. Lo stato è un elemento di memoria, cioè tiene conto dell'evoluzione passata del sistema. Questo permette al calcolatore in

[88]Ivi, p. 170.

ogni stato di memorizzare l'output ottenuto e considerarlo successivamente come input; in altre parole, le informazioni possono essere memorizzate o registrate per essere poi utilizzate. La macchina logica, invece, alla fine di ogni problema viene resettata (con il tasto `FINISH`), sullo schermo ricompaiono tutte le combinazioni di partenza ed è possibile procedere ad una nuova inferenza. In effetti il *logic piano* è una macchina progettata per eseguire inferenze, cioè è la meccanizzazione di un'algebra logica; mentre i moderni computer si servono dell'algebra logica come base e supporto per eseguire numerose operazioni ulteriori.

Alla luce di quanto si è detto, l'analogia di partenza risulta decisamente labile; per renderla più convincente andrebbe ristretta alla componente combinatoria del computer. Le reti combinatorie, infatti, sono composte da un elevato numero di circuiti elementari, o porte logiche, che sono dispositivi capaci di eseguire le operazioni logiche di base (`NOT`, `AND`, `OR`) su segnali binari, questi ultimi sono livelli di tensione indicati con una coppia di simboli, come 1-0, Vero-Falso, Chiuso-Aperto, Alto-Basso (il valore esatto della tensione del segnale non è significativo: conta l'appartenenza ad un livello contrassegnato alto e ad un livello contrassegnato basso). L'algebra booleana diventa, quindi, lo strumento più opportuno per descrivere il funzionamento di questi circuiti; l'intuizione decisiva in tal senso sarà quella di un giovane ingegnere americano, Claude Shannon, che nel 1938 dimostrerà l'esistenza di un isomorfismo tra i circuiti di commutazione [*switching circuits*] e il calcolo logico. È precisamente — ed esclusivamente — in questo senso che l'analogia tra il *logic piano* inventato da Jevons e i moderni computer può considerarsi solida: esso è una macchina che basa il suo funzionamento su un sistema, quello proposto da Jevons, che può considerarsi a tutti gli effetti, in termini moderni, un'algebra di Boole.

# Bibliografia


[1] Aspray, William, *Logic Machines*, in Id., *Computing before computer*, Iowa State University Press, Ames 1990.
URL = <http://ed-thelen.org/comp-hist/CBC-Ch-03.pdf>

[2] Barrett, Lindsay/Connell, Matthew (2005), *Jevons and the Logic 'Piano'* «The Rutherford Journal» vol. 1(2005).
URL = <http://www.rutherfordjournal.org/article010103.html>.

[3] Boole, George, *The Mathematical Analysis of Logic. Being an essay towards a Calculus of Deductive Reasoning*, MacMillan and Co., London 1847.

[4] Boole, George, *An Investigation of the Laws of Thought, on which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*, MacMillan, Cambridge 1854.

[5] Burris, Stanley, "The Algebra of Logic Tradition", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2009 Edition),
URL = <http://plato.stanford.edu/archives/sum2009/entries/algebra-logic-tradition/>.

[6] Burris, Stanley, "George Boole", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2010 Edition),
URL = <http://plato.stanford.edu/archives/sum2010/entries/boole/>.

[7] Grattan-Guinness, Ivor, *The Correspondence between George Boole and Stanley Jevons, 1863-1864*, «History and Philosophy of Logic» 12 (1991), pp. 15-35.

[8] Grattan-Guinness, Ivor, *The Search for Mathematical Roots, 1870-1940. Logics, set theories and the foundations of mathematics from Cantor through Russell to Gödel*, Princeton University Press, Princeton 2000.

[9] Hailperin, Theodore, *Boole's logic and probability. A critical exposition from the standpoint of contemporary algebra, logic and probability theory*, Elsevier Science, Amsterdam 1976, $1986^{2}$.

[10] Jevons, William S., *Pure Logic or the Logic of Quality apart from Quantity: with remarks on Boole's system and on the relation of logic and mathematics*, Stanford, London 1864.

[11] Jevons, William S., *The Principles of Science. A Treatise on Logic and Scientific Method*, MacMillan and Co., London 1874.

[12] Jevons, William S., *On the mechanical performance of logical inference*, in R. Adamson/H.A. Jevons (a cura di), *Pure Logic and Other Minor Works*, MacMillan and Co., London 1890.

[13] Jevons, William S., *The substitution of similars, the true principle of reasoning, derived from a modification of Aristotle's* dictum, in R. Adamson/H.A. Jevons (a cura di), *Pure Logic and Other Minor Works*, MacMillan and Co., London 1890.

[14] Mangione, Corrado, *La svolta della logica nell'Ottocento*, in L. Geymonat, *Storia del pensiero filosofico e scientifico*, vol. V, Garzanti, Milano 1971.

[15] Mosselmans, Bert, *William Stanley Jevons and the Extent of Meaning in Logic and Economics*, «History and Philosophy of Logic» 19 (1998), pp. 83-99.

[16] Mosselmans, Bert/Van Moer, Ard, *William Stanley Jevons and the Substitution of Similars*, in Dov M. Gabbay/J. Woods (a cura di), «Handbook of the History of Logic», vol 4, *British Logic in the Nineteenth Century*, Elsevier, Amsterdam 2008.

[17] Mosselmans, Bert, "William Stanley Jevons", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2008 Edition), URL = <http://plato.stanford.edu/archives/fall2008/entries/william-jevons/>.

[18] Mugnai, Massimo, *Boole e lo psicologismo: la caratterizzazione delle leggi logiche in* An Investigation of the Laws of Thought, in E. Agazzi/N. Vassallo (a cura di), *George Boole. Filosofia, logica, matematica*, Franco Angeli 1998.

[19] Mugnai, Massimo, *Per una storia della logica dall'antichità a Boole*, in AA.VV. *Nove lezioni di logica. La logica nel suo sviluppo storico e concettuale*, Muzzio, Padova 1990.