Università degli Studi di Udine

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea

GIOCHI DI PARITÀ: UNA PROSPETTIVA LOGICA

Relatrice:
Prof.ssa Giovanna D'Agostino

Laureanda:
Alessia Andò

Anno Accademico 2011-2012

Indice

Capitolo 1

Introduzione

In questa tesi ci occuperemo dei giochi tra due giocatori e del loro legame con opportuni linguaggi logici adatti a descriverli. A tal fine è necessario dare una descrizione matematica del concetto di "gioco". Possiamo pensare di descrivere un gioco tramite un insieme A (insieme delle "mosse possibili") e un insieme $X \subseteq A^\omega$ (insieme delle sequenze di mosse che farebbero vincere il primo dei due giocatori). Possiamo inoltre imporre che i due giocatori muovano alternativamente.

Non in tutti i giochi le sequenze di mosse possono essere arbitrariamente lunghe. La matematizzazione del concetto di "gioco" nasce appunto nel ventesimo secolo con lo studio dei giochi finiti (in particolare il gioco degli scacchi) e la dimostrazione della loro *determinatezza*, che li rende dunque "poco interessanti". Vedremo che non sono gli unici giochi a essere determinati, e vedremo inoltre il concetto di *determinatezza posizionale.*

Un *gioco di parità* è un gioco tra due giocatori detti I e II, che si svolge su un grafo orientato $G = (V = V_I \dot\cup V_{II}, E)$ tale che a ogni nodo $v \in V$ è associato un numero naturale minore o uguale a un certo n fissato, secondo una *funzione di priorità.* Il vincitore di ogni partita è dato dalla parità della più piccola priorità che appare infinite volte durante la partita stessa.

I giochi di parità hanno un'importanza teorica in ambito informatico, per via della lora complessità computazionale: la loro risoluzione è un problema di classe NP$\cap$ co-NP, tuttavia non è ancora stato trovato un algoritmo deterministico che lo risolva in tempo polinomiale. Tali giochi hanno, inoltre, applicazioni in ambito economico (teoria dell'utilità attesa, giochi stocastici).

Il μ-calcolo è una logica che estende quella modale con gli operatori μ e ν di minimo e massimo punto fisso. Oggi con tale termine intendiamo il sistema formale introdotto in [7]. Tale logica è utile per verificare proprietà di tipo "temporale" relative a sistemi di transizione, e la sua semantica viene normalmente studiata attraverso i *modelli di Kripke.*

In questa tesi mostreremo lo stretto legame tra giochi di parità e μ-calcolo. In particolare vedremo che per ogni gioco di parità esiste una formula del μ-calcolo che è vera in tutti e soli i punti da cui I ha una strategia *posizionale* vincente e falsa in tutti e soli quelli da cui II ne ha una (da qui la *determinatezza posizionale*) [10]. Viceversa, vedremo che i giochi di parità risolvono il problema del *model checking* per il μ-calcolo, idea di Büchi [1] successivamente sviluppata in [6] e in [3].

Per completezza inizieremo con l'esporre brevemente risultati generali sulla determinatezza dei giochi. Sappiamo, infatti, per un risultato di Martin ([8], determinatezza di tutti i giochi boreliani), che tutti i giochi che tratteremo in questa tesi sono determinati. La *determinatezza posizionale* relativa a giochi su grafi orientati, sulla quale ci concentreremo, è però strettamente più forte.
Nel quarto capitolo daremo una prima dimostrazione (facente uso dell'assioma della scelta) della determinatezza posizionale dei giochi di parità riadattando quella in [11]. Tale dimostrazione non passa attraverso il μ-calcolo.
Dopo aver esposto i risultati principali di cui sopra riguardo il rapporto tra giochi di parità e μ-calcolo concluderemo con la dimostrazione della determinatezza posizionale dei giochi di parità a infinite priorità, anch'essa facente uso del μ-calcolo.

Capitolo 2

Concetti preliminari

In questo capitolo introdurremo il concetto di gioco e alcune definizioni preliminari.
Sia A un insieme non vuoto e $X \subseteq A^\omega$. Definiamo il gioco $G(A, X)$ nel seguente modo: i due giocatori I e II giocano alternativamente - a cominciare da I - elementi di A; chiameremo d'ora in poi a_i l'i-esimo elemento giocato da I e b_i la risposta di II. I vince il gioco $G(A, X)$ se la successione ottenuta $(a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots) \in X$, in caso contrario la vittoria è di II. Per questo motivo, X è detto *insieme delle vincite*.
Tale successione viene detta una *partita* del gioco, i suoi termini $p(0) = a_0, p(1) = b_0, \ldots$ sono le *mosse* (del giocatore I se di posto dispari, del giocatore II se di posto pari), mentre una *posizione* x è un elemento di $A^{<\omega}$ (così chiameremo d'ora in poi l'insieme $\bigcup_{n\in\omega} A^n$) *contenuto* nella partita, ovvero, se $l(x)$ è la *lunghezza* di x (l'unico n tale che $x \in A^n$), si ha $x(n) = p(n)$ per ogni $n \leq l(x)$.
Una *strategia* per I è una funzione dalle sequenze finite di lunghezza pari in A ad A, in modo analogo una per II è una funzione dalle sequenze di lunghezza dispari in A ad A. Diciamo che I *segue* una strategia σ nella partita $(a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots)$ se $\sigma(a_0, b_0, \ldots, a_n, b_n) = a_{n+1}$ per ogni n, e una strategia è *vincente* se, per ogni partita giocata seguendo tale strategia, I vince il gioco. Definizioni analoghe valgono per il giocatore II. Alla luce di queste definizioni, possiamo interpretare una strategia come un suggerimento al giocatore in questione riguardante la mossa da effettuare, tenendo conto delle mosse precedenti.
Diciamo che X è *determinato* se uno dei due giocatori ha una strategia vincente in $G(A, X)$.
Può essere utile studiare anche giochi che siano governati da *regole*, ovvero in cui le *posizioni legali* sono un sottoinsieme propio delle sequenze finite di elementi di A. Vediamo però come anche lo studio di un gioco con regole può essere ricondotto allo studio di uno senza regole.

Definizione 1. *Dati $s, t \in A^{<\omega}$, diciamo che $s \subseteq t$ se $s(n) = t(n)$ per ogni $n \leq l(s)$.*
Un insieme $T \subseteq A^{<\omega}$ è un albero *se per ogni $t \in T$, $s \subseteq t$ si ha $s \in T$; gli elementi di T si chiamano* nodi.
Sia inoltre, per ogni $x \in A^\omega$, $x \restriction n = (x(0), \ldots, x(n-1))$. Diciamo che $x \in A^\omega$ è un ramo infinito *di T se $x \restriction n \in T$ per ogni n, e chiamiamo $[T]$ il* corpo *di T,*

ovvero l'insieme dei suoi rami infiniti.
Diciamo che un albero è potato *se per ogni $t \in T$ esiste $s \in T$ con $s \supsetneq t$.*

Vediamo come gli alberi ci permettono di illustrare la situazione. Vogliamo rappresentare con un albero potato non vuoto $T \subseteq A^{<\omega}$ l'insieme delle posizioni legali. Dato $X \subseteq [T]$ definiamo il gioco $G_T(A, X)$ in modo analogo a $G(A, X)$ ma con la restrizione che in ogni partita p si abbia $p \upharpoonright n \in T$ per ogni n. Sia adesso

$$X' = \{x \in A^\omega : \text{ il più piccolo } n \text{ tale che } x \upharpoonright n \notin T \text{ esiste ed è pari}\} \cup X$$

Osserviamo che le strategie vincenti per il giocatore I nei giochi $G(A, X')$ e $G_T(A, X)$ coincidono.
Sia infatti σ' una strategia vincente nel gioco $G(A, X')$; allora I può usarla anche nel gioco $G_T(A, X)$, infatti il dominio di σ' è l'insieme delle sequenze finite di lunghezza pari, dunque contiene l'insieme dei rami di lunghezza pari di T. Inoltre, per com'è definito X', σ' fornirà a I sempre mosse dentro T, essendo vincente; si otterrà una partita del gioco $G(A, X)$ secondo le "regole", dunque una partita di $G_T(A, X)$. Inoltre σ' sarà vincente anche per $G_T(A, X)$, infatti la partita risulterà dentro $X' \cap [T] = X$.
Viceversa, se σ è vincente per I in $G_T(A, X)$ e I la segue nel gioco $G(A, X')$ (può sempre farlo, essendo un gioco "senza regole") si verificano due casi: la partita è dentro $X \subseteq X'$, oppure è II a uscire da T a un certo punto della partita. In entrambi i casi, I vince.
In maniera del tutto analoga si dimostra che II ha una strategia vincente nel gioco $G_T(A, X)$ se e solo se ne ha una in $G(A, X')$.
Dunque i giochi con regole e quelli senza regole sono "interscambiabili".

Capitolo 3

Determinatezza dei giochi boreliani

È naturale chiedersi quali giochi siano determinati. Dimostriamo intanto che, sotto opportune condizioni (ad esempio, se vale l'Assioma della scelta) non tutti i giochi sono determinati.

Teorema 2 (Gale-Stewart)**.** *Supponiamo che ω^ω abbia un buon ordinamento. Allora esiste $X \subseteq \omega^\omega$ tale che $G(\omega, X)$ non è determinato.*

Dimostrazione. Utilizziamo un metodo di tipo diagonale. Osserviamo, innanzitutto, che l'insieme delle strategie per I ha la stessa cardinalità dell'insieme delle strategie per II. Infatti, le strategie sono funzioni da un insieme numerabile (ad esempio $\bigcup_{n\in\omega} w^{2n}$ nel caso del giocatore I) a ω, dunque i due insiemi hanno cardinalità $\kappa := |\omega^\omega|$.
Siano allora $\langle \sigma_i : i < \kappa \rangle$ e $\langle \tau_i : i < \kappa \rangle$ enumerazioni rispettivamente delle strategie di I e di II. Costruiamo per ricorsione transfinita un insieme $X = \{a_i : i < \kappa\}$ non determinato, e parallelamente un insieme $Y = \{b_i : i < \kappa\}$ disgiunto da X. Sia $\alpha < \kappa$ e supponiamo che $\{a_\beta : \beta < \alpha\}$ e $\{b_\beta : \beta < \alpha\}$ siano stati già definiti. Consideriamo la funzione $\phi_\alpha : \omega^\omega \longrightarrow \omega^\omega$ tale che per ogni $x \in \omega^\omega$ $\phi_\alpha(x)$ è la partita in cui II gioca gli elementi suggeriti da x mentre I segue la strategia σ_α. Tale funzione è chiaramente iniettiva, dunque $|Im(\phi_\alpha)| = \kappa$. Dunque è sempre possibile scegliere $b_\alpha \in Im(\phi_\alpha) \setminus \{a_\beta : \beta < \alpha\}$. Dualmente possiamo definire una funzione ψ_α e scegliere dunque un $a_\alpha \notin \{b_\beta : \beta \leq \alpha\}$ in cui II segue τ_α.
Ma allora X non è determinato. Supponiamo per assurdo che lo sia (supponiamo che I abbia una strategia vincente, senza perdita di generalità) e sia i tale che σ_i sia vincente per I. Sia inoltre x tale che $\phi_i(x) = b_i$. Ma allora se II gioca x vince, essendo $b_i \notin X$, assurdo. □

Abbiamo visto che, se vale l'Assioma della Scelta, allora non tutti i sottoinsiemi di ω^ω sono determinati. Successivamente si è dimostrato che si può arrivare l'esistenza di insiemi non determinati anche senza l'Assioma della Scelta:

Teorema 3 (Mycielski, 1964)**.** *Se A ha cardinalità $\aleph_1$, esiste $X \subseteq A^\omega$ che non è determinato.*

Ci proponiamo adesso di trovare condizioni sufficienti affinché un insieme sia determinato. La teoria descrittiva degli insiemi ci fornisce una classificazione gerarchica degli insiemi in base alla loro "complessità", la *gerarchia boreliana*:

Definizione 4. *Sia A uno spazio metrico. Definiamo per ricorsione transfinita su ξ le classi Σ^0_ξ e Π^0_ξ di sottoinsiemi A:*

- *$X \in \Sigma^0_1$ se e solo se è aperto;*
- *$X \in \Pi^0_1$ se e solo se è chiuso;*
- *$X \in \Sigma^0_\xi$ se e solo se è unione numerabile di insiemi Π^0_λ con $\lambda < \xi$;*
- *$X \in \Pi^0_\xi$ se e solo se è intersezione numerabile di insiemi Σ^0_λ con $\lambda < \xi$.*

Diciamo che X è boreliano *se appartiene a Σ^0_ξ o a Π^0_ξ per qualche ξ.*

D'ora in poi vedremo ogni insieme A come dotato della topologia discreta, e A^ω della topologia prodotto, con clopen di base $\{O(s) : s \in A^{<\omega}\}$ con $O(s) = \{x \in A^w : x \restriction l(s) = s\}$. Banalmente, ogni clopen di base $O(s)$ è determinato, infatti se $l(s) = 1$ a I basta giocare s alla prima mossa per vincere, se $l(s) > 1$ e $|A| > 1$ a II basta giocare un elemento diverso da $s(1)$ alla seconda mossa per vincere; infine, se $|A| = 1$ allora l'unica possibile partita è $(a, a, \dots)$ dove a è l'unico elemento di A, dunque è I a vincere.
Si potrebbe dimostrare (Martin, 1970), usando l'Assioma della Scelta, che ogni insieme boreliano è determinato. In questa tesi dimostreremo solo alcuni risultati preliminari: il primo passo è dimostrare che gli insiemi chiusi o aperti sono determinati. Dal seguente teorema otteniamo che è sufficiente dimostrare il risultato solo per i chiusi:

Teorema 5. *Sia $\Gamma \subseteq \mathcal{P}(A^\omega)$ chiuso per controimmagini di funzioni continue, e $\neg\Gamma = \{X \subseteq A^\omega : \exists Y \in \Gamma : X = A^\omega \setminus Y\}$. Allora, se ogni elemento di Γ è determinato, lo è anche ogni elemento di $\neg\Gamma$.*

Dimostrazione. Sia $X \in \neg\Gamma$, $X_{(a_0)} = \{x \in A^\omega : a_0 x \in X\}$, e sia G_{a_0} il gioco $G(A, X_{(a_0)})$ con la convenzione che II gioca per primo. Mostriamo innanzitutto che per ogni $a_0 \in A$ si ha che $X_{(a_0)}$ è determinato. Sia $Y = A^\omega \setminus X$. Allora è sufficiente dimostrare che $Y_{(a_0)}$ sia determinato, infatti G_{a_0} coincide sostanzialmente con il gioco $G(A, Y_{(a_0)})$ con i giocatori I e II invertiti.
Sia $\phi_{a_0} : A^\omega \longrightarrow A^\omega$ tale che $\phi_{a_0}(x) = a_0 x$; ϕ_{a_0} è continua nella topologia prodotto, dunque, visto che Y appartiene a Γ per ipotesi, anche $Y_{(a_0)} = \phi^{-1}_{a_0}(Y)$ ci appartiene. Allora $Y_{(a_0)}$ è determinato per ogni $a_0 \in A$, dunque lo è anche $X_{(a_0)}$.
Sia adesso $A_0 = \{a_0 \in A : \text{I ha una strategia vincente in } G(A, X_{(a_0)})\}$. Se $A_0 = \varnothing$ allora II ha una strategia vincente in $G(A, X)$. Infatti per ogni $a_0 \in A$ esiste σ'_{a_0} vincente per II in $G_{(a_0)}$, dunque la strategia σ definita da $\sigma(a_0, b_0, \dots, a_n) = \sigma'_{a_0}(b_0, \dots .b_n)$ per ogni $a_0 \in A$ è vincente per II.
Se invece $A_0 \neq \varnothing$, sia $a_0 \in A_0$ e σ' vincente per I in G_{a_0}. Allora I ha una strategia σ vincente in $G(A, X)$: basta definire $\sigma(\varnothing) = a_0$, $\sigma(a_0, b_0, \dots, a_n, b_n) = \sigma'(b_0, \dots, a_n, b_n)$ e $\sigma(x)$ arbitrario per ogni altro $x \in A^{<\omega}$.
In entrambi i casi, vi è una strategia vincente in $G(A, X)$, dunque X è determinato. □

Dunque è sufficiente dimostrare che i chiusi siano determinati. Anche per questo teorema ci servono delle ipotesi supplementari su A (in particolare, il teorema varrà sempre sotto l'Assioma della Scelta).

Teorema 6. *Supponiamo che A abbia un buon ordinamento. Allora ogni sottoinsieme $X \subseteq A^\omega$ chiuso è determinato.*

Dimostrazione. Chiamiamo *non perdente* (per I o per II) una posizione di una partita che non permetta all'avversario di vincere (ovvero, tale che non ha una strategia vincente da quella posizione in poi).
Supponiamo che II non abbia una strategia vincente, e costruiamone una per I che mostreremo essere vincente.
I sceglie alla prima mossa un $a_0 \in A$ tale che (a_0, b) è non perdente per I per ogni $b \in A$. Tale a_0 esiste sempre, visto che II non ha una strategia vincente. Alla mossa $n+1$-esima, se la posizione è $(a_0, b_0, \dots, a_n, b_n)$ I può giocare, per la stessa ragione, un a_{n+1} tale che per ogni $b \in A$ la posizione $(a_0, b_0, \dots, a_{n+1}, b)$ è non perdente. Tale strategia è dunque ben definita, infatti si può osservare per induzione su n che, qualsiasi siano le scelte fatte da II, $(a_0, b_0, \dots, a_n, b_n)$ è non perdente per ogni n.
Sia per assurdo $(a_0, b_0, \dots) \notin X$ una partita in cui I ha seguito tale strategia. Allora $(a_0, b_0, \dots) \in A^\omega \setminus X$, che è aperto. Ma allora $A^\omega \setminus X$ contiene un intorno della partita, ovvero esiste n tale che $O((a_0, b_0, \dots, a_n)) \subseteq A^\omega \setminus X$. Questo vuol dire che II avrebbe una strategia vincente da quel punto in poi, infatti, qualsiasi siano le mosse fatte da I e II la partita rimarrà nell'insieme $O((a_0, b_0, \dots, a_n, b_n))$ e quindi non apparterrà ad X. Ma II non ha una strategia vincente per ipotesi, assurdo. Allora la strategia illustrata è vincente per I. □

In questa tesi tratteremo solo casi in cui $A = \omega$, dunque il teorema precedente è sempre valido. Da tale teorema segue, in particolare, che se vale l'assioma della scelta allora ogni sottoinsieme chiuso di un insieme del tipo A^ω è determinato. Non è possibile dimostrare quest'ultimo fatto senza l'assioma della scelta, infatti vale anche il viceversa:

Teorema 7. *Supponiamo che tutti gli insiemi chiusi siano determinati. Allora vale l'Assioma della Scelta.*

Dimostrazione. Sia S un insieme di insiemi non vuoti, e sia $A = S \cup \bigcup S$. Consideriamo il gioco $G(A, X)$ dove $X = \{x \in A^\omega : x_0 \in S \wedge x_1 \notin x_0\}$. Essendo un gioco chiuso, è determinato. Allora II ha una strategia vincente: I, infatti, non potrebbe averne una, perché anche se giocasse un $a_0 \in S$, II potrebbe rispondere con un $b_0 \in a_0$. Sia σ la strategia vincente di II. Ma allora la restrizione di σ alle sequenze di lunghezza 1 è una funzione di scelta su S, dovendo necessariamente essere $b_0 = \sigma(a_0) \in a_0$. □

Capitolo 4

Determinatezza posizionale dei giochi di parità

Definiamo, adesso, una categoria di giochi tra due giocatori, i *giochi su grafi orientati*. Studieremo in particolare i *giochi di parità*. Vedremo che si tratta di giochi boreliani, dunque determinati per il teorema di Martin. Vogliamo però ottenere un risultato più forte della sola determinatezza, dimostreremo infatti che i giochi di parità sono *posizionalmente determinati*.

Definizione 8. *Una strategia σ è* posizionale *se per ogni $n, k \in \mathbb{N}$ e per ogni coppia di posizioni $(v_1, \ldots, v_n)$ e $(w_1, \ldots, w_k)$ si ha*

$$v_n = w_k \Rightarrow \sigma(v_1, \ldots, v_n) = \sigma(w_1, \ldots, w_k)$$

Una strategia posizionale può dunque essere vista come una funzione di dominio V_I (o V_{II}), essendo funzione solo dell'ultimo vertice scelto. Più in generale viene detta *a memoria finita* una strategia che è funzione solo delle ultime n mosse, per qualche n.
Un gioco è detto *posizionalmente determinato* se uno dei due giocatori ha una strategia posizionale vincente. Osserviamo che non tutti i giochi determinati (in particolare non tutti i boreliani) godono di tale proprietà. Si consideri ad esempio il gioco $G(\mathbb{R}, X)$ dove, se indichiamo con h_n da $\{a_0, \ldots, a_n\}$ a $\{b_0, \ldots, b_n\}$ la funzione tale che $h_n(a_i) = b_i$ per ogni $i \leq n$, si ha

$$X = \{(a_0, b_0, \ldots) \mid h_n \text{ è un isomorfismo locale tra } (\mathbb{R}, \leq) \text{ e } (\mathbb{Q}, \leq) \text{ per ogni } n\}.$$

Tale gioco è chiuso (secondo la topologia discreta) e quindi determinato per il teorema di Martin. Infatti, data una partita $x = (a_0, b_0, \ldots) \in \mathbb{R}^\omega \setminus X$, dato n tale che h_n non è un isomorfismo locale, si ha $O((a_0, b_0, \ldots, a_n, b_n)) \subseteq \mathbb{R}^\omega \setminus X$. In particolare è I ad avere una strategia vincente (grazie alla densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$). Tuttavia è facile osservare che tale gioco non ammette strategie a memoria finita.

4.1 Giochi su grafi orientati

Fissato un sottoinsieme finito C di $\mathbb{N}$ e un grafo orientato

$$G = (V = V_I \dot\cup V_{II}, E, v_0, \Omega : V \mapsto C),$$

un gioco su G è così definito: alla prima mossa, se $v_0 \in V_I[V_{II}]$ allora I [II] sceglie un successore v_1 di v_0; si ripete il procedimento a partire da v_1 e così via all'infinito, a meno che uno dei due giocatori non possa più muovere (il nodo a cui si è arrivati non ha successori), nel qual caso vince l'altro.
Tali giochi si distinguono in base alle condizioni di vittoria nel caso di una partita infinita, che si basano sulla funzione Ω.

Per i *giochi di Müller* la condizione di vittoria è data da un $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(C)$ ed è la seguente:
data una partita $\pi = (v_0, v_1, \ldots)$, sia $\Omega(\pi) = (\Omega(v_0), \Omega(v_1), \ldots)$ e sia $\mathrm{Inf}(\Omega(\pi))$ l'insieme degli elementi che compaiono infinite volte nella successione $\Omega(\pi)$. Allora I vince π se e solo se $\mathrm{Inf}(\Omega(\pi)) \in \mathcal{F}$.

Un gioco su un siffatto grafo va però visto come un gioco "con regole", dove la regola è sostanzialmente $(v_n, v_{n+1}) \in E$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre può essere ricondotto a un gioco dove i giocatori muovono alternativamente (come i giochi descritti all'inizio): ad esempio si potrebbe immaginare di espandere il grafo aggiungendo, per ogni coppia di nodi v, v' tali che $(v, v') \in E$ e $v \in V_I$ $[V_{II}]$, un nodo $v'' \in V_{II}$ $[V_I]$, sostituendo poi il lato (v, v') con (v, v'') e (v'', v'). A tali nodi "aggiunti" si assegna la priorità $\Omega(w) = \Omega(v)$. Chiaramente la "regola" del gioco andrebbe modificata opportunamente.

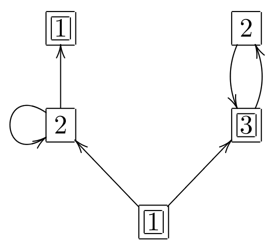
4.1.1 Giochi di parità

I giochi di parità sono una sottocategoria dei giochi di Müller in cui, dato un numero naturale fissato n e $C = \{1, \ldots, n\}$ si ha

$$\mathcal{F} = \{s \in \mathcal{P}(C) : \text{ il minimo di } s \text{ è pari}\}.$$

Dunque se la partita è infinita e $i \in \{1, \ldots, n\}$ è il più piccolo numero tale che $\Omega(v_k) = i$ per infiniti k, I vincerà la partita se e solo se i è pari.
Riprendendo le notazioni delle prime due sezioni, nel gioco in questione l'*arena* A non è altro che V^ω, mentre $X = \{(x_0, x_1, \ldots) : \liminf_{n \to +\infty} \Omega(x_n) \text{ è pari}\}$.

Esempio 9.



Sono indicati con il doppio riquadro i vertici del giocatore I, al centro sono le priorità; consideriamo inoltre come vertice iniziale v_0 quello situato più in basso. In quest'esempio I ha una strategia vincente: gli basta scegliere il vertice con priorità 3, e dunque la successione delle priorità ottenute sarà necessariamente

$$(1, 3, 2, 3, 2, 3, 2, \ldots)$$

dunque 2 è la più piccola priorità che compare infinite volte.
Se I scegliesse l'altro vertice perderebbe, infatti a quel punto a II basterebbe non

continuare a scegliere all'infinito il vertice con priorità 2, bensì scegliere a un certo punto l'altro, che appartiene a V_I e non ha successori.

I giochi di parità sono di fondamentale importanza nello scenario dei giochi di Müller in quanto ogni gioco di Müller è "riconducibile" a un gioco di parità, come ci garantisce il seguente teorema:

Teorema 10. *Dato un gioco di Müller su un grafo* $(V = V_I \dot\cup V_{II}, E, \Omega : V \to C, \mathcal{F})$ *esiste un grafo* $(V' = V'_I \dot\cup V'_{II}, E', \Omega' : V' \to \{1, \dots, n\})$ *e una funzione* $r : V \to V'$ *tale che I [II] ha una strategia vincente nel gioco di Müller* $(V, E, v, \Omega, \mathcal{F})$ *se e solo se ne ha una nel gioco di parità* $(V', E', r(v), \Omega')$.

Dimostrazione. (Cenni) Sia $\natural$ un simbolo che non occorre in C e sia $\tilde{C}$ l'insieme delle parole nell'alfabeto $C \cup \{\natural\}$ che contengono esattamente una volta il simbolo $\natural$ e hanno tutte le lettere distinte.
Siano inoltre $V'_I = V_I \times \tilde{C}$, $V'_{II} = V_{II} \times \tilde{C}$ (e dunque $V' = V \times \tilde{C}$). Sia $\phi : V' \to \tilde{C}$ la funzione tale che $\phi(v, q) = q'$ dove q' è ottenuta da q nel seguente modo: viene sostituita l'eventuale occorrenza di $\Omega(v)$ in q con $\natural$ e in tal caso cancellato $\natural$ dalla posizione in cui si trovava in q, poi viene aggiunto $\Omega(v)$ alla fine della parola. $\natural$ ha quindi la funzione di "marcatore".
Se $\pi = (v_0, v_1, \dots)$ è una partita del gioco di Müller, data la lista dei "record"

$$\begin{cases} q_0 = \natural\Omega(v_0) \\ q_{i+1} = \phi(v_{i+1}, q_i) \text{ per ogni } i \geq 0 \end{cases}$$

osserviamo che, da un certo punto in poi, q_i contiene alla destra di $\natural$ solo priorità che compaiono infinite volte nella partita. A questo punto possiamo definire

$$E' = \{((v, q), (v', \phi(v', q)) \mid v, v' \in V, (v, v') \in E, q \in \tilde{C}\},$$

$$r(v) = (v, \natural\Omega(v)) \text{ per ogni } v \in V,$$

e infine $\Omega' : V' \to \{1, \dots, |C|\}$:

$$\Omega'(v, x\natural y) = \begin{cases} 2(|C| - |y|) + 1 \text{ se } \{k \in C \mid k \text{ è una lettera di } y\} \notin \mathcal{F} \\ 2(|C| - |y|) \text{ altrimenti} \end{cases}$$

dove $|y|$ è la lunghezza di y. Per provare che il grafo così costruito soddisfa le condizioni che ci eravamo proposti, osserviamo innanzitutto che a una partita π del gioco di Müller di partenza corrisponde un'unica partita π' del gioco di parità, di cui possiamo considerare le proiezioni $p_1(\pi') = \pi$ e $p_2(\pi') = (q_0, q_1, \dots)$ dove $q_i = x_i \natural y_i$ per ogni i.

Sia $F :=\mathrm{Inf}(\Omega(\pi))$. Allora definitivamente per $i \geq i_0$ si ha $|y_i| \leq |F|$, inoltre l'insieme

$$\{i \geq i_0 \mid |y_i| = |F|\}$$

è infinito, perché ogni elemento di F viene "spostato" infinite volte alla fine della parola. Allora la più piccola priorità che compare infinite volte in π' è pari (in particolare è $2(|C| - |F|)$) se e solo se $F \in \mathcal{F}$.
La verifica che gli esiti delle due partite coincidano nel caso in cui siano finite è banale.
Abbiamo dunque mostrato che π è vincente per I se e solo se lo è π' nel gioco di parità appena costruito. Viceversa, a una partita π' con vertice iniziale $r(v)$ corrisponde una partita π nel gioco di Müller che ha lo stesso esito.

□

Come già accennato, i giochi di parità sono boreliani (dunque determinati). Infatti, indicando con ω^* l'insieme delle sequenze finite di elementi di ω, si ottiene che l'insieme $A^i_m := (\omega^* m)^i \omega^\omega$ è aperto per ogni i, m, dunque l'insieme $A_m = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A^i_m$ è Π^0_2. D'altra parte l'insieme delle vincite è

$$X = \bigcap_{m\leq n: m \text{ dispari}} \left(\overline{A_m} \cup \bigcup_{k<m: k \text{ pari}} A_k \right),$$

che è dunque intersezione finita di unioni finite di insiemi Π^0_2 e Σ^0_2, dunque è un insieme di tipo $\Pi^0_3 \cap \Sigma^0_3 =: \Delta^0_3$.

4.2 Definizioni e lemmi preliminari

Al fine di mostrare il risultato di determinatezza posizionale dei giochi di parità, forniamo preliminarmente alcuni concetti necessari.

Definizione 11. *Sia $G = (V, E, \Omega)$ un grafo associato a un gioco di parità, e siano $U \subseteq V$, e $v \in U$. Allora $G[U] := (U, E \cap (U \times U), v, \Omega \restriction U)$ è un* sottogioco *se ogni vertice senza successori in $G[U]$ non ha successori nemmeno in G.*

Vediamo come nella precedente definizione non ha alcuna importanza il punto iniziale del gioco, ma solo la struttura del grafo. Nel seguito identificheremo dunque, in tale contesto, un gioco di parità con generico punto iniziale e il relativo grafo. Inoltre chiameremo *vertice cieco* un vertice senza successori.

Lemma 12. *Dato $G = (V, E, \Omega)$, siano $U, U' \subseteq V$ tali che $G[U]$ è un sottogioco di G e $(G[U])[U']$ è un sottogioco di $G[U]$. Allora $G[U']$ è un sottogioco di G.*

D'ora in poi indicheremo con $g \in \{I, II\}$ un giocatore generico, e con $\neg g$ l'altro giocatore.

4.2.1 g-trappole

Definizione 13. *Dato $G = (V, E, \Omega)$, diciamo che $U \subseteq V$ è una g-trappola se*

- *Ogni vertice di $U \cap V_{\neg g}$ ha almeno un successore in U;*
- *Ogni vertice di $U \cap V_g$ ha tutti i successori in U.*

Ovvero, una volta che viene scelto un vertice di U, $\neg g$ ha una strategia per "non uscire" più da U.

Elenchiamo alcune banali proprietà delle g-trappole:

Lemma 14. 1. *Se U è una g-trappola, allora $G[U]$ è un sottogioco.*

2. *Se $\{U_i\}_{i\in I}$ è una famiglia di g-trappole, allora $\bigcup_{i\in I} U_i$ è una g-trappola.*

3. *Se X è una g-trappola e $Y \subseteq X$, allora Y è una g-trappola in G se e solo se lo è in $G[X]$.*

4.2.2 g-attrattori

Definiamo adesso gli *attrattori* e verifichiamo alcune loro proprietà e relazioni con le g-trappole.

Definizione 15. *Dato un grafo $G = (V = V_I \dot\cup V_{II}, E)$ e un giocatore g, il gioco $R_g(G, X)$ è un gioco svolto sul grafo G tale che g vince una partita se e solo se uno dei vertici giocati appartiene a X oppure è un vertice cieco di $V_{\neg g}$.*

Definizione 16. *Dato $G = (V, E, \Omega)$ sia $X \subseteq V$. Il g-*attrattore *$Attr_g(G, X)$ è l'insieme dei vertici da cui g ha una strategia vincente nel gioco $R_g(G, X)$.*

Lemma 17. *Sia $G = (V, E, \Omega)$, $X \subseteq V$. Allora g ha una strategia posizionale vincente in $R_g(G, X)$ da ogni vertice di $Attr_g(G, X)$.*

Dimostrazione. Definiamo la funzione $p : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V)$:

$$p(Y) = \{v \in V_g \mid \exists v'(E(v, v') \wedge v' \in Y)\} \cup \{v \in V_{\neg g} \mid \forall v'(E(v, v') \to v' \in Y)\}$$

e definiamo per ricorsione transfinita X^ν:

$$\begin{cases} X^0 = X \\ X^{\nu+1} = X^\nu \cup p(X^\nu) \\ X^\lambda = \bigcup_{\nu<\lambda} X^\nu \text{ se } \lambda \text{ è un ordinale limite} \end{cases}$$

Sia ξ il più piccolo ordinale tale che $X^{\xi+1} = X^\xi$ (esiste perché la cardinalità di ogni X^ν è limitata da quella di V): vogliamo mostrare che $W = X^\xi$.
Per ogni $v \in X^\xi \setminus X$, sia ξ_v l'unico ordinale tale che $v \in X^{\xi_v+1} \setminus X^{\xi_v}$. Definiamo per ogni $v \in (X^\xi \setminus X) \cap V_g$ il vertice $f(v)$ come uno dei successori di v che appartiene a X^{ξ_v}. Mostriamo per induzione transfinita che per ogni $\nu \leq \xi$ la funzione f è una strategia posizionale vincente per g dai vertici di X^ν.
Supponiamo che f sia una strategia posizionale vincente per $X^{\nu'}$ per ogni $\nu' < \nu$ e mostriamo che lo è per X^ν. Se ν è un ordinale limite, la tesi segue direttamente dalla definizione di X^ν. Se è un ordinale successore, sia ν' il suo predecessore. Se $v \in (X^\nu \setminus X^{\nu'}) \cap V_g$ allora $f(v) \in X^{\nu'}$, dunque dal vertice $f(v)$ in poi g ha una strategia vincente. Se $v \in (X^\nu \setminus X^{\nu'}) \cap V_{\neg g}$ allora ogni successore di v appartiene a $X^{\nu'}$ dunque, qualunque mossa faccia $\neg g$, f sarà vincente per g da quel punto in poi. Infine, se $v \in X^{\nu'}$ la tesi segue direttamente dall'ipotesi induttiva.
Da ciò segue $X^\xi \subseteq W$.
Viceversa, sia $v \in \bar{X}^\xi$. Se v è cieco allora è necessariamente $v \in V_g$, e dunque $\neg g$ vince immediatamente in tale vertice. Se v non è cieco e appartiene a $V_{\neg g}$, allora sia $f(v)$ un successore di v che appartiene a $\bar{X}^\xi$ (esiste certamente per com'è stato definito X_ξ). Allora la funzione f è una strategia posizionale vincente per $\neg g$, infatti ogni vertice di $\bar{X}^\xi \cap V_g$ ha tutti i successori in $\bar{X}^\xi$, dunque ogni partita giocata seguendo tale strategia sarà interamente "contenuta" in $\bar{X}^\xi$. D'altra parte X e l'insieme dei vertici ciechi appartenenti a $V_{\neg g}$ sono contenuti in X^ξ, dunque $\neg g$ vince la partita. Allora $\bar{X}^\xi \subseteq \bar{W}$.
Allora si ha $X^\xi = W$ e $\bar{X}^\xi = \bar{W}$. □

Lemma 18.
1. *$V \setminus Attr_g(G, X)$ è una g-trappola.*
2. *Se $X \subseteq V$ è una g-trappola in G, allora lo è anche $Attr_{\neg g}(G, X)$.*
3. *$X \subseteq V$ è una g-trappola in G se e solo se $Attr_g(G, V \setminus X) = V \setminus X$.*

4. *$Attr_g(G,X) = V \setminus U$ dove U è la più grande g-trappola contenuta in $V \setminus X$.*

Dimostrazione. 1. Sia $v \in V \setminus Attr_g(G,X)$. Se $v \in V_{\neg g}$ allora $\neg g$ può scegliere un successore in $V \setminus Attr_g(G,X)$, altrimenti g avrebbe una strategia per raggiungere X o un vertice cieco di $V_{\neg g}$ in un numero finito di passi (che consiste nell'attendere la mossa di $\neg g$ e poi seguire la strategia dall'ultimo vertice scelto). Se $v \in V_g$ allora g non può scegliere un vertice in $Attr_g(G,X)$ per un ragionamento simile al precedente.

2. Sia v un vertice di $Attr_{\neg g}(G,X)$. Sappiamo che $\neg g$ ha una strategia vincente da tale vertice nel gioco $R_{\neg g}(G,X)$. Dunque, se $v \in V_{\neg g} \setminus X$ allora ha almeno un successore in $Attr_{\neg g}(G,X)$, altrimenti $\neg g$ sarebbe costretto a muovere in un vertice da cui non ha una strategia vincente.
Se invece $v \in V_{\neg g} \setminus X$ allora ha tutti i successori in $Attr_{\neg g}(G,X)$, altrimenti potrebbe muovere in un vertice da cui $\neg g$ non avrebbe una startegia vincente.
Infine, se $v \in X \cap V_{\neg g}$ $[X \cap V_g]$, allora ha certamente almeno un successore [tutti i successori] in $X \subseteq Attr_{\neg g}(G,X)$.

3. Se X è una g-trappola allora i vertici di X non possono appartenere a $Attr_g(G, V \setminus X)$ perché $\neg g$ ha una strategia per restare sempre dentro X partendo da un suo vertice. Dunque $Attr_g(G, V \setminus X) \subseteq V \setminus X$. Inoltre, banalmente $V \setminus X \subseteq Attr_g(G, V \setminus X)$.
Viceversa, dal punto precedente si ha che $V \setminus Attr_g(G, V \setminus X)$ è una g-trappola. Ma $X = V \setminus (V \setminus X) = V \setminus Attr_g(G, V \setminus X)$.

4. Si ha $X \subseteq V \setminus U$ per definizione di U, dunque, dal fatto che U è una g-trappola, $Attr_g(G,X) \subseteq Attr_g(G, V \setminus U) = V \setminus U$.
Viceversa, proviamo $V \setminus Attr_g(G,X) \subseteq U$. $V \setminus Attr_g(G,X)$ è una g-trappola per il primo punto del lemma, e inoltre è banalmente contenuto in $V \setminus X$. Dal terzo punto del lemma 14, U contiene tutte le g-trappole contenute in $V \setminus X$, in particolare contiene dunque $V \setminus Attr_g(G,X)$.

□

4.2.3 g-paradisi

Definizione 19. *Dato $G = (V, E, \Omega)$, un g-paradiso $U \subseteq V$ è un insieme tale che*

- *U è una $\neg g$-trappola;*
- *Da ogni vertice di U g ha una strategia posizionale per vincere rimanendo sempre in U.*

Lemma 20. 1. *Se U è un g-paradiso, lo è anche $Attr_g(G,U)$.*

2. *(AC) Se $\{U_i\}_{i \in I}$ è una famiglia di g-paradisi, $\bigcup_{i \in I} U_i$ è un g-paradiso.*

Dimostrazione. 1. Dal lemma 18 sappiamo che $Attr_g(G,U)$ è una g-trappola. Resta da dimostrare che g ha una strategia vincente che gli permette di non uscire mai da $Attr_g(G,U)$ a partire da ogni vertice in $Attr_g(G,U) \setminus U$.

Sia dunque $v \in Attr_g(G, U) \setminus U$: se g ha una strategia vincente nel gioco $R_g(G, U)$ a partire da v, ne ha una posizionale per il lemma 17. Se ha una strategia posizionale per raggiungere un vertice cieco di $V_{\neg g}$, la stessa strategia gli permette di vincere. Se invece ha una strategia posizionale per raggiungere U, allora da quel punto in poi gli è sufficiente seguire la strategia posizionale vincente a partire dai vertici di U.

2. Dal lemma 14 sappiamo che $\bigcup_{i \in I} U_i$ è una $\neg g$-trappola. Resta dunque da costruire una strategia posizionale a partire dai vertici di tale insieme.
   Sia $\prec$ un buon ordine su I e sia, per ogni i, f_i la strategia posizionale vincente dai vertici di U_i. Consideriamo la seguente strategia: per ogni vertice in $\bigcup_{i \in I} U_i \cap V_g$ sia $f(v) := f_i(v)$ dove i è il minimo i tale che $v \in U_i$.
   Mostriamo che tale strategia è vincente per g:
   Sia data una partita infinita $(v_0, v_1, \ldots)$ in cui g segue f e sia, per ogni k, i_k il minimo indice tale che $v_k \in U_{i_k}$. Allora $v_{k+1} \in U_{i_k}$ per ogni k: infatti, se $v_k \in V_g$ allora $v_{k+1} = f(v_k) = f_{i_k}(v_k)$, mentre se $v_k \in V_{\neg g}$ allora ogni suo successore appartiene a U_{i_k} essendo questa una $\neg g$-trappola. Ma allora $i_{k+1} \leq i_k$ per ogni k. Si ottiene dunque una successione debolmente decrescente infinita di elementi di un insieme ben ordinato, dunque deve essere definitivamente costante. Questo vuol dire che esiste j tale che definitivamente per $k \geq k_0$ si ha $v_k \in U_j$ e j è il minimo indice con tale proprietà. Dunque f coincide definitivamente con f_j, che è vincente, e allora g vince la partita.
   Sia data invece una partita finita, sia v l'ultimo vertice giocato e sia i tale che $v \in U_i$. g ha una strategia vincente a partire da ogni vertice di U_i, dunque deve essere $v \in V_{\neg g}$. Ma allora g vince la partita.

□

4.3 Determinatezza posizionale

Mostreremo la proprietà di determinatezza posizionale attraverso il seguente teorema:

Teorema 21. *Sia $G = (V, E, \Omega : V \to \{m, m+1, \ldots, n\})$ un gioco di parità. Allora V è unione (disgiunta) di un I-paradiso e un II-paradiso.*

Dimostreremo il teorema per induzione su $n-m$. Il seguente lemma costituisce il passo base:

Lemma 22. *Sia G un grafo in cui tutti i vertici hanno la stessa priorità. Allora V è unione di un I-paradiso e un II-paradiso.*

Dimostrazione. Supponiamo inizialmente che la priorità sia dispari (può essere fatto un ragionamento analogo nell'altro caso). $Attr_I(G, \varnothing)$ è un I-paradiso, infatti è costituito dai vertici da cui I ha una strategia per raggiungere un vertice cieco di V_{II} in un numero finito di mosse. Questo coincide d'altronde con il suo insieme delle vincite, infatti ogni partita infinita è vinta da II. Resta da dimostrare che $V \setminus Attr_I(G, \varnothing)$ è un II-paradiso. È una I-trappola per il lemma 18. Inoltre da quest'insieme II ha una strategia posizionale vincente (gli basta scegliere sempre successori in $V \setminus Attr_I(G, \varnothing)$). □

Supponiamo da ora in poi $n-m > 0$, e indichiamo con g il giocatore che vince se la priorità m compare infinite volte. Diamo alcuni risultati preliminari basati sull'esistenza di un $\neg g$-paradiso, che indichiamo con $X_{\neg g}$ tale che $X_g := V \setminus X_{\neg g}$ sia una $\neg g$-trappola. Siano infine

$$M := \{v \in X_g \mid \Omega(v) = m\} \qquad Z := X_g \setminus \mathit{Attr}_g(G[X_g], M).$$

$G[X_g]$ è un sottogioco di G, essendo X_g una $\neg g$-trappola. Inoltre Z è una g-trappola per il lemma 18, dunque $(G[X_g])[Z]$ è un sottogioco di $G[X_g]$, dunque anche di G per il lemma 12. Le priorità di $G[Z]$ appartengono all'insieme $\{m+1, \ldots, n\}$, dunque per ipotesi induttiva $Z = Z_I \dot{\cup} Z_{II}$ dove Z_g è un g-paradiso per g=I, II.

Lemma 23. *$X_{\neg g} \cup Z_{\neg g}$ è un $\neg g$-paradiso in G.*

Dimostrazione. $Z_{\neg g}$ è un $\neg g$-paradiso in $G[Z]$, dunque in particolare è una g-trappola. Essendo Z una g-trappola in $G[X_g]$, per il lemma 14 $Z_{\neg g}$ è una g-trappola in $G[X_g]$. Allora $X_{\neg g} \cup Z_{\neg g}$ è una g-trappola in G, infatti g non può uscire da $Z_{\neg g}$ restando all'interno di X_g, ma può solo restare dentro $Z_{\neg g}$ oppure spostarsi in $X_{\neg g}$. Resta da dimostrare che $\neg g$ ha una strategia posizionale vincente a partire da $X_{\neg g} \cup Z_{\neg g}$ che rimanga sempre in tale insieme. Infatti, gli è sufficiente seguire la strategia vincente per $Z_{\neg g}$ finché si trova in tale insieme (esiste in quanto è un $\neg g$-paradiso). Se la partita resta sempre in $Z_{\neg g}$ viene in tal modo vinta da $\neg g$. Se invece si sposta a un certo punto in $X_{\neg g}$, allora $\neg g$ può far sì che si resti sempre in $X_{\neg g}$ e seguire la strategia posizionale vincente in quell'insieme (anche $X_{\neg g}$ è un $\neg g$-paradiso). □

Lemma 24. *Se $Z_{\neg g} = \varnothing$, X_g è un g-paradiso.*

Dimostrazione. Si ha $Z = Z_g$, dunque g ha una strategia posizionale vincente a partire da ogni vertice di Z, sia essa z. Sia inoltre f la strategia posizionale di g per raggiungere, a partire da un vertice di $\mathit{Attr}_g(G[X_g], M) \setminus M$, l'insieme M o un vertice cieco di $V_{\neg g}$ in un numero finito di passi. Sia infine h una funzione che associa a ogni vertice di $M \cap V_g$ un suo successore in X_g (che esiste sempre essendo X_g una $\neg g$-trappola). Si consideri dunque la funzione $x_g : X_g \cap V_g \to X_g$ così definita:

$$x_g(v) = \begin{cases} z(v) \text{ se } v \in Z \\ f(v) \text{ se } v \in \mathit{Attr}_g(G[X_g], M) \setminus M \\ h(v) \text{ se } v \in M \end{cases}$$

Tale funzione è una strategia vincente per g, infatti:

- Se si raggiunge un vertice di Z allora g può seguire la strategia z da quel punto in poi, dunque vince;
- Se non viene mai toccato alcun vertice di Z, ovvero si rimane sempre dentro $\mathit{Attr}_g(G[X_g], M)$, allora ci sono due possibilità: g riesce a raggiungere prima o poi un vertice cieco di $V_{\neg g}$, dunque vince, oppure raggiunge M infinite volte (perché da ogni vertice dell'attrattore può essere raggiunto M in un numero finito di passi), e dunque vince.

□

Possiamo adesso dimostrare il teorema 21.

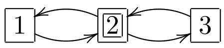
Dimostrazione. Dimostriamo il teorema per induzione su $n - m$. Se $n = m$ la tesi segue dal lemma 22. Supponiamo adesso $n > m$. Costruiamo per induzione transfinita una famiglia di $\neg g$-paradisi $W^{\xi}_{\neg g}$:

- $W^0_{\neg g} = \varnothing$;
- Dato $X^{\xi} := Attr_{\neg g}(G, W^{\xi}_{\neg g})$, dal lemma 20 sappiamo che è un $\neg g$-paradiso, e dal lemma 18 che $V \setminus X^{\xi}$ è una $\neg g$-trappola. Siamo quindi nelle condizioni del lemma 23: se $Z^{\xi}_{\neg g}$ il $\neg g$-paradiso definito come sopra, definiamo per ogni ξ
$$W^{\xi+1}_{\neg g} := X^{\xi} \cup Z^{\xi}_{\neg g};$$
- Se λ è un ordinale limite, $W^{\lambda}_{\neg g} = \bigcup_{\nu<\lambda} W^{\nu}_{\neg g}$.

Osserviamo che questa è una buona definizione: infatti, se $W^{\xi}_{\neg g}$ è un $\neg g$-paradiso lo è anche $W^{\xi+1}_{\neg g}$ per il lemma 23. Inoltre dalle rispettive dimostrazioni si ottiene che la strategia vincente $w^{\xi+1}_{\neg g}$ relativa a $W^{\xi+1}_{\neg g}$ estende $w^{\xi}_{\neg g}$. Dal secondo punto dello stesso lemma 23 si ottiene che anche nel caso di ordinale limite λ si ha che $w^{\lambda}_{\neg g}$ estende $w^{\nu}_{\neg g}$ per $\nu < \lambda$. Sia $W_{\neg g} = \bigcup_{\xi} W^{\xi}_{\neg g}$, ovvero il più grande dei g-paradisi del tipo $W^{\xi}_{\neg g}$, in particolare si ha $W_{\neg g} = W^{\nu}_{\neg g}$ dove ν è il più piccolo ordinale tale che $W^{\nu+1}_{\neg g} = W^{\nu}_{\neg g}$. Allora $Attr_{\neg g}(G, W^{\nu}_{\neg g}) \subseteq W^{\nu+1}_{\neg g} = W_{\neg g}$, dunque i due insiemi coincidono. Dimostriamo che $W_g := V \setminus W_{\neg g}$ è un g-paradiso.
W_g è una $\neg g$-trappola in quanto coincide con $V \setminus Attr_{\neg g}(G, W_{\neg g})$ (lemma 18). Inoltre, essendo $W_{\neg g} = W_{\neg g} \cup Z_{\neg g}$ e $Z_{\neg g} \cap W_{\neg g} = \varnothing$, si ha $Z_{\neg g} = \varnothing$, dunque W_g è un g-paradiso per il lemma precedente. $\square$

Osserviamo infine che il risultato di determinatezza posizionale non può essere generalizzato a tutti i giochi di Müller.

Esempio 25.



Sia $C = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{F} = \{\{1, 2, 3\}\}$. I ha una strategia vincente (gli basta scegliere alternativamente i vertici con priorità 1 e 3) ma non può averne alcuna di tipo posizionale.

Capitolo 5

Dai giochi di parità al μ-calcolo

Richiamiamo adesso qualche definizione sul μ-calcolo, e vedremo in che modo tale logica è correlata ai giochi di parità. In particolare, riprendendo la dimostrazione fatta in [10], vedremo che in un gioco di parità l'insieme dei punti da cui I ha una strategia vincente è l'insieme dei nodi del grafo in cui è vera una certa formula del μ-calcolo.
Viceversa, data una certa formula del μ-calcolo, stabilire se è vera in un dato modello è riconducibile a un gioco di parità.

5.1 μ-calcolo

Il μ-calcolo è un modo di estendere la logica modale che fa uso dei concetti di massimo e minimo punto fisso. Introduciamo nel linguaggio $\mathcal{L}$ di partenza le variabili proposizionali libere (che indicheremo usualmente con X, $Y, \ldots$).

Definizione 26. *Indichiamo con L_μ l'insieme delle formule del μ-calcolo, definito come segue:*

- *Se $P_a \in \Sigma$ (insieme fissato di "parametri proposizionali") allora $P_a, \neg P_a \in L_\mu$;*
- *Se X è una variabile proposizionale allora $X \in L_\mu$;*
- *Se $\phi \in L_\mu$ e X è una variabile proposizionale allora $\mu X.\phi$ e $\nu X.\phi \in L_\mu$;*
- *Se $\phi, \psi \in L_\mu$ allora $\phi \wedge \psi, \phi \vee \psi, \Box\phi, \Diamond\phi \in L_\mu$.*

Per estendere la semantica della logica modale anche alle formule di L_μ non modali, dobbiamo dare un significato alle variabili libere:

Definizione 27. *Sia (M, m) un modello di Kripke, $A \subseteq M$. Allora definiamo*

$$(M, A, m) \models X \Leftrightarrow m \in A.$$

La definizione è estesa in modo naturale a ogni $\phi \in LM$ con X libera: per stabilire il valore di verità di ϕ dovremo assegnare alla variabile X un sottoinsieme A di

M e procedere poi come nel caso delle formule modali per definire induttivamente la relazione $(M, A, m) \models \phi$:

$$(M, A, m) \models \phi \Leftrightarrow (M, m) \models \phi \textit{ dove } X \textit{ è interpretato come } A.$$

Ne segue che ogni formula ϕ con al più una variabile libera X può essere vista come un operatore F_ϕ su M tale che, per ogni $A \subseteq M$, vale

$$F_\phi(A) = \{m \in M : (M, A, m) \models \phi\}.$$

Con la sintassi come sopra, le formule risultano essere sempre in *negation normal form*, ovvero le variabili proposizionali non sono mai negate. Inoltre si considerano formule in cui le variabili proposizionali sono quantificate al massimo una volta (ogni formula può essere trasformata in questo modo con delle rinomine). In questo caso si può dimostrare che F_ϕ è un operatore monotono per ogni ϕ modale, per induzione sul suo grado modale.
Un risultato di Tarski-Knaster sugli operatori monotoni ci garantisce che questi hanno massimo e minimo punto fisso.
Gli operatori μ e ν sono, appunto, gli operatori di minimo e massimo punto fisso, interpretati nel seguente modo:

$$(M, m, A_1, \ldots, A_k) \models \mu X.\phi(X_1, \ldots, X_k, X) \Leftrightarrow m \in LFP(F_\phi(A_1, \ldots, A_n, X)),$$

$$(M, m, A_1, \ldots, A_k) \models \nu X.\phi(X_1, \ldots, X_k, X) \Leftrightarrow m \in GFP(F_\phi(A_1, \ldots, A_n, X))$$

dove LFP e GFP sono rispettivamente il minimo e il massimo punto fisso dell'operatore.
Si verifica che F_ϕ è monotono anche per ogni $\phi \in L_\mu$ non modale, usando un ragionamento induttivo sulla sua complessità.
Definiamo adesso, per ricorsione transfinita, le *approssimazioni* di una formula del tipo $\mu X.\alpha(X)$ dove $\alpha(X)$ è una formula del μ-calcolo con la sola X libera; si potrebbe dare una definizione analoga per le formule del tipo $\nu X.\alpha(X)$. Indicheremo, in generale, con $||f||$, per ogni formula f priva di variabili libere, l'insieme

$$\{m \in M \mid (M, m) \models f\},$$

dove M è un modello fissato.

Definizione 28. $||\mu^0 X.\alpha(X)|| = \varnothing$
$||\mu^{\tau+1} X.\alpha(X)|| = ||\alpha(X)||_{[X \mapsto ||\mu^\tau X.\alpha(X)||]}$
$||\mu^\lambda X.\alpha(X)|| = \bigcup_{\rho<\lambda} ||\mu^\rho X.\alpha(X)||$ *se λ è un ordinale limite.*

D'ora in poi espanderemo la sintassi della logica del μ-calcolo con questi concetti. Ricordiamo inoltre che dal teorema di Knaster-Tarski segue

$$||\mu X.\alpha(X)|| = \bigcup_\rho ||\mu^\rho X.\alpha(X)||.$$

Esempio 29. Sia $\phi = \mu X.\Diamond(X \vee P)$. Allora si ha
$\phi^0 := \phi(\bot) = \Diamond(\bot \vee P) = \Diamond P$
$\phi^1 := \phi(\phi(\bot)) = \phi(\Diamond P) = \Diamond\Diamond P \vee \Diamond P$
$\vdots$

$\phi^{n+1} = \Diamond^n P \vee \Diamond^{n-1} P \vee \cdots \vee \Diamond P$.
Allora, se M è un modello finito, $(M, w) \models \mu X.\Diamond(X \vee P) \Leftrightarrow$ esiste un cammino di lunghezza maggiore o uguale a 1 che porta a uno stato in cui vale P.

Esempio 30. Qual è il significato della formula

$$F = \nu Y.\mu X.(\Diamond(X) \vee ((P) \wedge \Diamond(Y)))?$$

La formula è vera in (M, v) se e solo se

$$v \in G := GFP(||\mu X.(\Diamond(X) \vee (P \wedge \Diamond(Y)))||).$$

Per definizione di punto fisso, si ha $G = \{w \in M : (M, G, w) \models \mu X.(\Diamond(X) \vee (P \wedge \Diamond Y))\}$, che, tendendo conto dell'esercizio 1, è uguale all'insieme $\{w \in M :$ da w è possibile raggiungere in un numero finito di passi uno stato $f(w)$ in cui vale P, ed esiste uno stato $g(w)$ con $f(w) R^M g(w)$ e $g(w) \in G\}$. Allora, reiterando il processo si ottiene che se v soddisfa la formula allora esiste un cammino infinito che incontra uno stato in cui vale P infinite volte (in $f(v)$, $f(g(v), \ldots, f(g^n(v)), \ldots)$.
Viceversa, sia A l'insieme di stati di un cammino che parte da v e incontra uno stato in cui vale P infinite volte. Ma allora, se $H(Y) = \mu X.(\Diamond(X) \vee (P \wedge \Diamond(Y)))$, si ha $A \subseteq H(A)$, infatti per definizione da ogni suo punto raggiungo uno stato in cui vale $P \wedge \Diamond A$ in un numero finito di passi. Dunque v appartiene a un post-punto fisso, quindi appartiene al massimo punto fisso.
Dunque la formula è vera in uno stato v di un modello M se e solo se da v parte un cammino che incontra infinite volte P.

Esempio 31. Che significato ha la formula G che inverte l'ordine dei quantificatori della precedente formula F?

$$G = \mu X.\nu Y.(\Diamond(X) \vee (P \wedge \Diamond(Y)))$$

Se M è un dominio finito, allora $(M, v) \models G$ se e solo se da v parte un cammino infinito in cui vale P definitivamente. Infatti, se $\phi(X) = \nu Y.(\Diamond(X) \vee (P \wedge \Diamond(Y)))$ allora si ha

- $\phi^0 = \phi(\perp) = \nu Y.(P \wedge \Diamond(Y))$, quindi $X_0 := ||\phi^0|| = \{w \in M :$ da w parte un cammino infinito in cui vale $P\}$;
- $\phi^1 = \nu Y.(\Diamond X_0 \vee (P \wedge \Diamond(Y)))$, quindi $X_1 = ||\phi^1|| = \{w \in M :$ esiste w' tale che $w R^M w'$ e da w' parte un cammino infinito in cui vale $P\}$;

  $\vdots$
- $X_n = \{w \in M :$ da w parte un cammino infinito in cui vale P a partire dal passo $n\}$.

5.2 Dai giochi di parità al μ-calcolo

D'ora in avanti, in questa sezione identificheremo un grafo relativo a un gioco di parità $G = (V = V_I \dot\cup V_{II}, E, v_0, \Omega : V \mapsto \{1, \ldots, n\})$ con il suo modello di Kripke associato $M(G) = (V, E, V_I, V_{II}, Q_1, \ldots, Q_n, v_0)$, dove per ogni $i \leq n, v \in V$ si ha

$$Q_i(v) \Leftrightarrow \Omega(v) = i.$$

Inoltre, supporremo che n sia sempre pari, senza perdita di generalità.
Adesso possiamo occuparci del teorema principale della sezione.

Teorema 32. *Sia data la formula del μ-calcolo*

$$F(Z_1,\ldots,Z_n) = \left(V_I \wedge \Diamond\left(\bigwedge_{i\leq n} \neg Q_i \vee Z_i\right)\right) \vee \left(V_{II} \wedge \Box\left(\bigwedge_{i\leq n} \neg Q_i \vee Z_i\right)\right)$$

e sia $v \in V$. Se vale

$$(M(G),v) \models \mu Z_1.\nu Z_2 \ldots \nu Z_n.F(Z_1,\ldots,Z_n)$$

allora I ha una strategia vincente nel gioco di parità che parte da v. Altrimenti, II ha una strategia vincente.

Utilizzeremo da adesso il concetto di *segnatura* di un vertice, che è una n-upla di ordinali. Considereremo tali n-uple dotate dell'ordine lessicografico, e d'ora in poi scriveremo $\leq_k$ per indicare la disuguaglianza tra i due membri se troncati dopo le prime k posizioni. Analogo sarà il significato di $=_k$ e $<_k$.

Definizione 33. *Sia $\mathcal{S}$ una funzione definita su un sottoinsieme U di V che assegna una segnatura a ogni nodo. Siano $v \in Y, w \in V$ tali che $(v,w) \in E$. Diciamo che w è* buono per *v se $w \in U$ e inoltre*

$$\mathcal{S}(w) \leq_{\Omega(w)} \mathcal{S}(v)$$

e vale la disuguaglianza stretta se $\Omega(w)$ è dispari.
Diciamo inoltre che $\mathcal{S}$ è consistente *se ogni vertice in $U \cap V_I$ ha un successore buono, e ogni vertice in $U \cap V_{II}$ ha tutti i successori buoni.*

Definizione 34 (Segnatura canonica)**.** *Sia $v \in V$, F definita come nell'enunciato del teorema 32. Allora definiamo la sua* segnatura canonica $\mathrm{Sig}(v)$ *come la più piccola n-upla $(\tau_1,\ldots,\tau_n)$ tale che*

$$v \in ||F(U_1,\ldots,U_n)||$$

dove, se i è dispari si ha

$$U_i = \mu^{\tau_i} Z_i.\nu Z_{i+1}.\mu Z_{i+2}\ldots.F(U_1,\ldots,U_{i-1},Z_i,\ldots,Z_n)$$

mentre, se i è pari

$$U_i = \nu Z_i.\mu Z_{i+1}\ldots.\nu Z_n.F(U_1,\ldots,U_{i-1},Z_i,\ldots,Z_n).$$

Osserviamo che dalla definizione segue direttamente $\tau_i = 0$ per ogni i pari.

Teorema 35. *Sia $W = ||\mu Z_1 \ldots \nu Z_n.F(Z_1,\ldots,Z_n)||$. Allora, per ogni $v \in V$, v ha una segnatura canonica se e solo se $v \in W$.*

Dimostrazione. Sia $v \in W$. Dal teorema di Knaster-Tarski si ha che per qualche ρ ordinale successore

$$v \in ||\mu^\rho Z_1.\nu Z_2 \ldots.\nu Z_n.F(Z_1,\ldots,Z_n)||$$

dunque, posto

$$U_1 = ||\mu^{\rho-1} Z_1.\nu Z_2 \ldots .\nu Z_n.F(Z_1, \ldots, Z_n)||$$

(ovvero $\tau_1 = \rho - 1$) si ha

$$v \in ||\nu Z_2 \ldots .\nu Z_n.F(U_1, Z_2, \ldots, Z_n)|| = U_2,$$

da cui segue

$$v \in ||\mu Z_3 \ldots .\nu Z_n.F(U_1, U_2, Z_3, \ldots, Z_n)||.$$

Ripetendo il ragionamento dall'inzio $n/2$ volte in tutto, si ottiene $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ (con $\tau_i = 0$ se i è pari) tali che $v \in ||F(U_1, \ldots, U_n)||$. La più piccola n-upla con questa proprietà sarà la segnatura canonica.
Viceversa, sia v tale che $Sig(v) = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$. Per la definizione di punto fisso e le proprietà delle approssimazioni, si ha

$$||F(U_1, \ldots, U_n)|| = ||\nu Z_n.F(U_1, \ldots, U_{n-1}, Z_n)|| =$$
$$= ||\mu^{\tau_{n-1}+1} Z_{n-1}.\mu Z_n.F(U_1, \ldots, U_{n-2}, Z_{n-1}, Z_n)|| \subseteq$$
$$\subseteq ||\mu Z_{n-1}.\nu Z_n.F(U_1, \ldots, U_{n-2}, Z_{n-1}, Z_n)|| =$$
$$= ||\nu Z_{n-2}.\mu Z_{n-1}.\nu Z_n.F(U_1, \ldots, U_{n-3}, Z_{n-2}, Z_{n-1}, Z_n)|| = \ldots$$
$$\ldots \subseteq ||\mu Z_1 \ldots .\nu Z_n.F(Z_1, \ldots, Z_n)|| = W.$$

□

Teorema 36. *La funzione che assegna a ogni vertice (di W) la sua segnatura canonica $Sig(v)$ è consistente.*

Dimostrazione. Consideriamo dapprima il caso $v \in V_I$. Sappiamo che $v \in ||F(U_1, \ldots, U_n)||$ dove gli U_i sono definiti come nella definizione della segnatura canonica. Dunque si ha

$$v \in \left|\left| \diamond \left(\bigwedge_{i \leq n} \neg Q_i \vee U_i \right) \right|\right|,$$

ovvero esiste un successore w di v tale che

$$w \in \left|\left| \bigwedge_{i \leq n} \neg Q_i \vee U_i \right|\right|,$$

ovvero $w \in ||U_{\Omega(w)}||$. Trattiamo prima il caso $i := \Omega(w)$ dispari. Sappiamo, dalla definizione di U_i, che esiste un cardinale successore ρ (che può essere τ_i oppure un $\rho < \tau_i$ nel caso quest'ultimo fosse un ordinale limite) tale che

$$w \in ||\mu^\rho Z_i.\nu Z_{i+1} \ldots .\nu Z_n.F(U_1, \ldots, U_{i-1}, Z_i, \ldots, Z_n)||,$$

ovvero, posto

$$U_i' = \mu^{\rho-1} Z_i.\nu Z_{i+1} \ldots Z_n.F(U_1, \ldots, U_{i-1}, Z_i, \ldots, Z_n)||$$

si ha
$$w \in ||\nu Z_{i+1}.\mu Z_{i+2} \dots .\nu Z_n.F(U_1, \dots, U_i', Z_{i+1}, \dots, Z_n)||.$$
Ripetendo il ragionamento, si ottiene che esistono ordinali $\tau_{i+1}', \dots, \tau_n'$ tali che
$$w \in ||F(U_1, \dots, U_{n-1}, U_i', \dots, U_n')||$$
dove, se $j > i$ è dispari si ha
$$U_j' = \mu^{\tau_j'} Z_j, \nu Z_{j+1} \dots .\nu Z_n.F(U_1, \dots, U_{i-1}, U_i', \dots, U_{j-1}', Z_j, \dots, Z_n)$$
mentre se è pari si ha
$$U_j' = \nu Z_j. \dots \nu Z_n.F(U_1, \dots, U_{i-1}, U_i', \dots, U_{j-1}', Z_j, \dots, Z_n).$$
Questo ci dice innanzitutto che $Sig(w)$ è ben definita (dunque $w \in W$) e inoltre
$$\begin{aligned} Sig(w) &\le (\tau_1, \dots, \tau_{i-1}, \rho - 1, \tau_{i+1}', \dots, \tau_n') \\ &<_i (\tau_1, \dots, \tau_{i-1}, \rho, \tau_{i+1}, \dots, \tau_n) = Sig(v), \end{aligned}$$
dunque w è un buon successore per v.
Il sottocaso in cui i è pari è più semplice in quanto non occorre una diseguaglianza stretta. D'altra parte si avrebbe
$$w \in ||\nu Z_i \dots .\nu Z_n.F(U_1, \dots, U_{i-1}, Z_i, \dots, Z_n)||$$
da cui si ottiene
$$w \in ||\mu Z_{i+1} \dots .\nu Z_n.F(U_1, \dots, U_i, Z_{i+1}, \dots, Z_n)||.$$
Anche in questo caso, andando avanti, otteniamo opportuni $\tau_{i+1}', \dots, \tau_n'$ tali che
$$w \in ||F(U_1, \dots, U_{n-1}, U_i', \dots, U_n')||$$
e dunque
$$\begin{aligned} Sig(w) &\le (\tau_1, \dots, \tau_{i-1}, 0, \tau_{i+1}', \dots, \tau_n') \\ &\le_i (\tau_1, \dots, \tau_{i-1}, 0, \tau_{i+1}, \dots, \tau_n) = Sig(v). \end{aligned}$$
Il caso in cui $v \in V_{II}$ è analogo, ma l'asserto andrebbe dimostrato per tutti i successori di v. D'altra parte in questo caso si ha
$$v \in \left|\left| \Box \left(\bigwedge_{i \le n} \neg Q_i \vee U_i \right) \right|\right|$$
quindi le stesse osservazioni possono essere fatte per tutti i successori di v. $\Box$

Prima di dimostrare il teorema 32 diamo la seguente definizione.

Definizione 37. *Una strategia posizionale per I è* minimizzante *se sceglie, per ogni nodo, un successore di quelli con segnatura canonica minima.*

Al fine di dimostrare il teorema 32, mostriamo in particolare che

Teorema 38. *Sia dato un gioco di parità su un grafo G e un punto iniziale v_0. Sia W l'insieme definito nell'enunciato del teorema 35. Se $v_0 \in W$, allora qualunque strategia minimizzante per I è vincente. Se invece $v_0 \notin W$, allora II ha una strategia posizionale vincente.*

Dimostrazione. Trattiamo prima il caso $v_0 \in W$. Supponiamo, per assurdo, che I segua una strategia minimizzante e che tuttavia il cammino $v_0, v_1, \dots$ ottenuto è tale che la più piccola priorità che appare infinite volte è un numero dispari p. Sia dunque j tale che nessun vertice che segue v_j nel cammino ha priorità minore di p. Sia inoltre $\{v_{k_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sottosuccessione della successione di vertici rappresentante il cammino, tale che $k_1 = j$ e $\Omega(v_{k_i}) = p$ per ogni $i \in \mathbb{N}$. Dal teorema precedente otteniamo che $Sig(v_{k_i}) >_p Sig(v_{k_{i+1}})$ per ogni i, qualsiasi siano le mosse giocate da II. D'altra parte l'ordine lessicografico tra p-uple di ordinali è un buon ordine (per ogni p), dunque non possono esistere successioni strettamente decrescenti infinite.
Per trattare invece il caso $v_0 \notin W$, osserviamo preliminarmente che, per ogni modello puntato (M, m) vale

$$(M, m) \models \nu Z.\neg\phi(\neg Z) \Leftrightarrow (M, m) \not\models \mu Z.\phi(Z).$$

Infatti, si ha $||\mu Z.\phi(Z)|| = \bigcap\{S \subseteq M : F_\phi(S) = S\}$, mentre

$$||\nu Z.\neg\phi(\neg Z)|| = \bigcup\{S \subseteq M : \overline{F_\phi(\overline{S})} = S\} = \bigcup\{S \subseteq M : F_\phi(\overline{S}) = \overline{S}\}.$$

In particolare

$$\overline{W} = ||\nu Z_1.\mu Z_2.\dots\mu Z_n.\neg F(\neg Z_1, \dots, \neg Z_n)||.$$

Inoltre

$$\begin{aligned}\neg F(\neg Z_1, \dots, \neg Z_n) &= \left(V_{II} \vee \Box\left(\bigvee_{i\le n} Q_i \wedge Z_i\right)\right) \wedge \left(V_I \vee \Diamond\left(\bigvee_{i\le n} Q_i \wedge Z_i\right)\right) \equiv \\ &\equiv \left(V_I \wedge \Box\left(\bigvee_{i\le n} Q_i \wedge Z_i\right)\right) \vee \left(V_{II} \wedge \Diamond\left(\bigvee_{i\le n} Q_i \wedge Z_i\right)\right).\end{aligned}$$

Tenendo conto del fatto che $\{Q_1, \dots, Q_n\}$ è una partizione di V, la formula precedente equivale a $F(Z_1, \dots, Z_n)$ con i ruoli di I e II scambiati. Si consideri dunque il gioco sul grafo G' ottenuto da G scambiando V_I con V_{II} e tale che $\Omega'(v) = \Omega(v) + 1$ per ogni $v \in V$. Si consideri inoltre la formula

$$\begin{aligned}&F'(Z_1, \dots, Z_{n+2}) = \\ &= \left(V_{II} \wedge \Diamond\left(\bigwedge_{2\le i\le n+1} \neg Q_i \vee Z_i\right)\right) \vee \left(V_I \wedge \Box\left(\bigwedge_{2\le i\le n+1} \neg Q_i \vee Z_i\right)\right)\end{aligned}$$

ottenuta da F scambiando i ruoli di I e II, dove la variabile Z_{i+1} assume il ruolo che aveva Z_i in F e le variabili Z_1 e Z_{n+2} non assumono alcun ruolo.
Allora in G' si ha

$$\overline{W} = ||\mu Z_1 \dots \nu Z_{n+2}.F'(Z_1, \dots, Z_{n+2})||$$

E per quanto visto nella prima parte della dimostrazione, I ha una strategia vincente nel gioco di G' a partire da ogni vertice in $\overline{W}$. Ma il giocatore II nel gioco di G si trova nella stessa situazione del giocatore I nel gioco di G' per quanto osservato. Dunque ha una strategia vincente. $\square$

Capitolo 6

Dal μ-calcolo ai giochi di parità

Adesso, data una formula del μ-calcolo ϕ e un modello di Kripke (M, m) vorremmo costruire un grafo $G(\phi, M, m)$ e un gioco di parità associato tale che

$$(M, m) \models \phi \Leftrightarrow \text{I ha una strategia vincente.}$$

Ciò è stato sostanzialmente fatto in [4] passando attraverso gli automi su alberi. Per poter definire la funzione Ω sui nodi del grafo ci è necessario il concetto di grado di alternanza.

Definizione 39. *Data una formula del μ-calcolo ϕ definiamo, per induzione sulla sua complessità, il suo grado di alternanza. $\alpha(\phi)$:*

- $\alpha(\bot) = \alpha(\top) = \alpha(Q) = \alpha(\neg Q) = \alpha(X) = 0$ *per ogni Q parametro proposizionale e X variabile proposizionale;*
- $\alpha(\psi_1 \wedge \psi_2) = \alpha(\psi_1 \vee \psi_2) = \max\{\alpha(\psi_1), \alpha(\psi_2)\}$*;*
- $\alpha(\Box\psi) = \alpha(\Diamond\psi) = \alpha(\psi)$*;*
- $\alpha(\mu X.\psi) = \max\{\{1, \alpha(\psi)\} \cup \{\alpha(\nu X'.\psi') + 1 \mid \nu X'.\psi'$ *è una sottoformula di ψ con X libera*$\}\}$*;*
- $\alpha(\nu X.\psi) = \max\{\{1, \alpha(\psi)\} \cup \{\alpha(\mu X'.\psi') + 1 \mid \mu X'.\psi'$ *è una sottoformula di ψ con X libera*$\}\}$*;*

Intuitivamente, il valore $\alpha(\phi)$ indica "quante volte si alternano" i simboli μ e ν. D'altra parte, la definizione può essere semplificata facendo uso del seguente lemma:

Lemma 40. *Sia ϕ una formula del μ-calcolo con due variabili libere, (M, m) un modello di Kripke, e $\eta \in \{\mu, \nu\}$. Allora vale*

$$(M, m) \models \eta X.\eta Y.\phi(X, Y) \Leftrightarrow (M, m) \models \eta X.\phi(X, X).$$

Dimostrazione. Dimostriamo il lemma, a titolo d'esempio, nel caso $\eta = \mu$. Sia $B = \{M' \subseteq M \mid ||\mu Y.\phi(M', Y)|| \subseteq M'\}$ e $A = \{M' \subseteq M \mid ||\phi(M', M')|| \subseteq M'\}$.

Dobbiamo allora dimostrare che $\bigcap A = \bigcap B$.
"$\supseteq$" Dalla dimostrazione del teorema di Tarski-Knaster, sappiamo che $\bigcap A$ è il minimo punto fisso dell'operatore $F_{\phi(X,X)}$. Allora

$$||\phi(\bigcap A, \bigcap A)|| \subseteq \bigcap A,$$

da cui

$$\bigcap\{M'' \subseteq M \mid ||\phi(\bigcap A, M'')|| \subseteq M''\} \subseteq \bigcap A,$$

da cui $\bigcap A \in B$ e dunque $\bigcap A \supseteq \bigcap B$.
"$\subseteq$" Viceversa, supponiamo per assurdo che $\bigcap B \notin A$, da cui segue

$$||\phi(\bigcap B, \bigcap B)|| \nsubseteq \bigcap B.$$

Dalla dimostrazione del teorema di Tarski-Knaster sappiamo che $\bigcap B$ è il minimo punto fisso dell'operatore $F_{\mu Y.\phi(\bigcap B,Y)}$. Quindi si ottiene

$$\begin{aligned} ||\phi(\bigcap B, \bigcap B)|| \nsubseteq \bigcap B &= ||\mu Y.\phi(\bigcap B, Y)|| \\ &= \bigcap\{M'' \subseteq M \mid ||\phi(\bigcap B, M'')|| \subseteq M''\}. \end{aligned}$$

Questo vuol dire che esiste $M'' \subseteq M$ tale che $\bigcap B \subseteq M''$ e

$$||\phi(\bigcap B, M'')|| \subseteq M'', \qquad ||\phi(\bigcap B, \bigcap B|| \nsubseteq M'',$$

contro la monotonia dell'operatore $F_{\phi(\bigcap B,X)}$. Allora $\bigcap B \in A$ e dunque vale $\bigcap A \subseteq \bigcap B$.

$\square$

Il risultato è che ogni formula del tipo $\eta X_1 \ldots .\eta X_m.\psi$ e $\eta \in \{\mu, \nu\}$ è equivalente a una formula in cui i simboli μ e ν "si alternano" (ad esempio $\phi = \mu X_1.\nu X_2.\mu X_3 \ldots .\nu X_n.\psi$). Per una formula ϕ di questo tipo è più semplice definire $\alpha(\phi)$, che non sarebbe altro che il numero di simboli μ e ν occorrenti. Dunque in questi caso potremmo ridefinire

$$\alpha(\mu X.\psi) = 1 + \alpha(\psi)$$

$$\alpha(\nu X.\psi) = 1 + \alpha(\psi).$$

Possiamo adesso definire il grafo $G(\phi, M, m)$.

Definizione 41. *Sia (M, m) un modello di Kripke, ϕ un enunciato del μ-calcolo, Φ l'insieme delle sue sottoformule. Allora l'insieme V dei nodi del grafo $G(\phi, M, m)$ è definito come il più piccolo sottoinsieme di $\Phi \times M$ tale che $(\phi, m) \in V$ e inoltre, per ogni $(\psi, s) \in V$ vale*

- *se $\psi = \eta X.\psi'$ con $\eta \in \{\mu, \nu\}$ allora $(\psi', s) \in V$;*
- *se $\psi = \psi_1 \circ \psi_2$ con $\circ \in \{\wedge, \vee\}$ allora (ψ_1, s), $(\psi_2, s) \in V$;*
- *se $\psi = \circ\psi'$ con $\circ \in \{\Box, \Diamond\}$ allora $(\psi', s') \in V$ per ogni s' in relazione con s nel modello M;*

- *se* $\psi = X$ *con* X *variabile proposizionale allora* $(\eta X.\psi', s) \in V$ *dove* $\eta X.\psi'$ *è la sottoformula di* ϕ *che "lega"* X.

Definiamo adesso la relazione E*, ovvero l'insieme degli archi del grafo, descrivendo per ogni* $(\psi, s) \in V$ *l'insieme* $(\psi, s)E$ *dei suoi successori:*

- *se* $\psi = \eta X.\psi'$ *con* $\eta \in \{\mu, \nu\}$ *allora* $(\psi, s)E = \{(\psi', s)\}$;
- *se* $\psi = \psi_1 \circ \psi_2$ *con* $\circ \in \{\wedge, \vee\}$ *allora* $(\psi, s)E = \{(\psi_1, s), (\psi_2, s)\}$;
- *se* $\psi = \circ\psi'$ *con* $\circ \in \{\Box, \Diamond\}$ *allora* $(\psi, s)E = \{(\psi', s') \mid sRs'\}$ *dove* R *è la relazione binaria definita in* M;
- *se* $\psi = X$ *con* X *variabile proposizionale allora* $(\psi, s)E = \{(\eta X.\psi', s)\}$ *dove* $\eta X.\psi'$ *è la sottoformula di* ϕ *che "lega"* X.

Definiamo adesso gli insiemi V_I *e* V_{II} *dei rispettivi giocatori.* $(\psi, s) \in V_I$ *se e solo se vale una delle seguenti:*

- $\psi = \bot$;
- $\psi = Q$ *con* Q *parametro proposizionale e* $(M, s) \not\models Q$;
- $\psi = \neg Q$ *con* Q *parametro proposizionale e* $(M, s) \models Q$;
- $\psi = X$ *con* X *variabile proposizionale;*
- $\psi = \eta X.\psi'$ *con* $\eta \in \{\mu, \nu\}$ *e* $\psi' \in L_\mu$;
- $\psi = \psi_1 \vee \psi_2$ *con* $\psi_1, \psi_2 \in L_\mu$;
- $\psi = \Diamond\psi'$ *con* $\psi' \in L_\mu$.

In tutti gli altri casi, $(\psi, s) \in V_{II}$.
Definiamo infine la funzione di priorità Ω:

- *Se* ψ *è del tipo* $\mu X.\psi'$ *allora* $\Omega(\psi, s)$ *sarà il più grande numero dispari minore o uguale a* $\alpha(\phi) - \alpha(\psi) + 1$;
- *Se* ψ *è del tipo* $\nu X.\psi'$ *allora* $\Omega(\psi, s)$ *sarà il più grande numero pari minore o uguale a* $\alpha(\phi) - \alpha(\psi) + 1$;
- *In tutti gli altri casi* $\Omega(\psi, s) = \alpha(\phi)$.

Come già accennato all'inizio del paragrafo, dimostreremo il seguente teorema:

Teorema 42. $(M, m) \models \phi$ *se e solo se* I *ha una strategia vincente nel gioco* $G(\phi, M, m)$.

Faremo uso del seguente lemma:

Lemma 43. *Sia* G *un gioco di parità con punto iniziale* v*,* σ *una strategia posizionale per* I *e* x *una partita in cui* I *gioca seguendo* σ*. Sia* $v' = x(i)$ *per qualche* $i \in \mathbb{N}$*. Allora, detto* $G \downarrow v'$ *il "sottogioco"* $G(V = V'_I \dot\cup V'_{II}, E', v', \Omega)$ *generato da* v' *(ovvero in cui* V' *è l'insieme dei discendenti di* v'*, mentre* $E' = E \cap (V' \times V')$*,* $V'_I = V_I \cap V'$*,* $V'_{II} = V_{II} \cap V'$*,* $\Omega' = \Omega \restriction_{V'}$*),* $\sigma \restriction_{V'}$ *è una strategia vincente per* I *in* $G \downarrow v'$.

Dimostrazione. Si ha $x(n) \in V'$ per ogni $n \geq i$, essendo V' costituito da tutti i discendenti di v. Sia $y = (y(1), y(2), \ldots)$ una partita di $G \downarrow v'$ in cui I segue la strategia $\sigma \restriction_{V'}$. Allora $(x(1), \ldots, x(i), y(1), y(2), \ldots)$ è una partita di G in cui I segue σ, dunque è vinta da I. Ma le condizioni per la vittoria in un gioco di parità dipendono solo dalla mossa finale, se esiste, o altrimenti dalle priorità che compaiono infinite volte, dunque l'esito non è modificato dall'aggiunta di un segmento iniziale. $\square$

6.1 Dimostrazione del teorema 42

Dimostreremo il teorema per induzione sulla complessità di ϕ; iniziamo con due lemmi che ci faciliteranno il passo induttivo.

Lemma 44. *Siano ψ_1, ψ_2 formule del μ-calcolo. Allora valgono le seguenti:*

- *I ha una strategia posizionale vincente nel gioco $G(\psi_1 \wedge \psi_2, M, s)$ se e solo se ne ha una per ciascuno dei giochi $G(\psi_1, M, s)$ e $G(\psi_2, M, s)$;*
- *I ha una strategia posizionale vincente nel gioco $G(\psi_1 \vee \psi_2, M, s)$ se e solo se ne ha una per uno dei giochi fra $G(\psi_1, M, s)$ e $G(\psi_2, M, s)$.*

Dimostrazione. Iniziamo col provare il primo punto.
"$\Rightarrow$": Essendo $\psi_1 \wedge \psi_2$ una congiunzione, tocca al giocatore II fare la prima mossa. Sia essa (ψ_i, s). Ma $G(\psi_i, M, s) = G(\psi_1 \wedge \psi_2, M, s) \downarrow (\psi_i, s)$, dunque la tesi segue dal lemma 43.
"$\Leftarrow$": Siano σ_1 e σ_2 le strategie di I rispettivamente per i giochi $G(\psi_1, M, s)$ e $G(\psi_2, M, s)$. Allora una strategia per I è quella di attendere la prima mossa di II, sia essa (ψ_i, s), e continuare utilizzando la strategia σ_i, che è vincente. Dunque tale strategia è vincente per il gioco $G(\psi_1 \wedge \psi_2, M, s)$.
La dimostrazione del secondo punto è analoga, con la differenza che spetta a I fare la prima mossa, dunque è sufficiente una strategia vincente solo per uno dei "sottogiochi". $\square$

Lemma 45. *Sia ψ una formula del μ-calcolo. Allora valgono le seguenti:*

- *I ha una strategia posizionale vincente nel gioco $G(\Box\psi, M, s)$ se e solo se ne ha una per ciascun gioco $G(\psi, M, s')$ con s' successore di s nel modello M;*
- *I ha una strategia posizionale vincente nel gioco $G(\Diamond\psi, M, s)$ se e solo se ne ha una per uno dei giochi $G(\psi, M, s')$ con s' successore di s nel modello M.*

Dimostrazione. Iniziamo col provare il secondo punto.
"$\Rightarrow$": Sia σ una strategia vincente posizionale e sia $v = \sigma((\Diamond\psi, s))$. Allora, per com'è stato definito il gioco relativo a una formula, v deve essere della forma (ψ, s') con s' successore di s. D'altra parte $G(\psi, M, s') = G(\Diamond\psi, M, s) \downarrow (\psi, s')$, dunque la tesi segue dal lemma 43.
"$\Leftarrow$": Sia s' il successore di s per cui I ha una strategia vincente σ nel gioco $G(\psi, M, s')$. Allora la strategia di I che consiste nello scegliere il vertice (ψ, s') alla prima mossa e poi proseguire seguendo σ è vincente.
La dimostrazione del primo punto è analoga, con la differenza che spetta a II

fare la prima mossa, dunque è necessario che ci sia una strategia vincente per tutti i "sottogiochi". □

Dimostiamo adesso, per induzione, il teorema 42.

Dimostrazione.

- Se ϕ è $\bot, \top$ o un altro parametro proposizionale, la tesi segue direttamente dalla definizione di V_I e V_{II}. Infatti sono di I tutti i vertici del tipo (Q, s) con $(M, s) \not\models Q$. In questi casi dunque la vittoria è di II perché I non può muovere. Negli altri casi, analogamente, la vittoria è di I.

- Se $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$, usando il lemma 44 e l'ipotesi induttiva, otteniamo

  $$(M, m) \models \phi \Leftrightarrow (M, m) \models \phi_1 \text{ e } (M, m) \models \phi_2$$

  $\Leftrightarrow$ I ha una strategia vincente per entrambi i giochi $G(\phi_1, M, m)$ e $G(\phi_2, M, m)$
  $\Leftrightarrow$ I ha una strategia vincente per il gioco $G(\phi, M, m)$.

- Se $\phi = \phi_1 \vee \phi_2$, usando il lemma 44 e l'ipotesi induttiva, otteniamo

  $$(M, m) \models \phi \Leftrightarrow (M, m) \models \phi_1 \text{ o } (M, m) \models \phi_2$$

  $\Leftrightarrow$ I ha una strategia vincente per uno tra i giochi $G(\phi_1, M, m)$ e $G(\phi_2, M, m)$
  $\Leftrightarrow$ I ha una strategia vincente per il gioco $G(\phi, M, m)$.

- Se $\phi = \Box\phi'$ usando il lemma 45 e l'ipotesi induttiva, otteniamo

  $$(M, m) \models \phi \Leftrightarrow (M, m') \models \phi' \text{ per ogni } m' \text{ successore di } m$$

  $\Leftrightarrow$ I ha una strategia vincente per tutti i giochi $G(\phi', M, m')$ con m' successore di m
  $\Leftrightarrow$ I ha una strategia vincente per il gioco $G(\phi, M, m)$.

- Se $\phi = \Diamond\phi'$ usando il lemma 45 e l'ipotesi induttiva, otteniamo

  $$(M, m) \models \phi \Leftrightarrow (M, m') \models \phi' \text{ per un certo } m' \text{ successore di } m$$

  $\Leftrightarrow$ I ha una strategia vincente per uno dei giochi $G(\phi', M, m')$ con m' successore di m
  $\Leftrightarrow$ I ha una strategia vincente per il gioco $G(\phi, M, m)$.

- Se $\phi = \mu X.\phi'$, dobbiamo dimostrare che

  $$LFP(F_{\phi'}(X)) = \\ = \{s \in M \mid \text{ I ha una strategia vincente per il gioco } G(\mu X.\phi', M, s)\}.$$

  "$\subseteq$": Sia M_μ il membro destro dell'uguaglianza sopra. Dal teorema di Tarski-Knaster si ha $LFP(F_{\phi'}(X)) = \bigcap\{M' \subseteq M \mid F_{\phi'}(M') \subseteq M'\}$, basta dimostrare che $F_{\phi'}(M_\mu) \subseteq M_\mu$. Per l'ipotesi induttiva, sappiamo che $F_{\phi'}(M_\mu)$ è esattamente l'insieme dei punti di M tali che I ha una strategia vincente nel gioco $G(\phi', M[X/M_\mu], s)$ (dove la variabile X in $\mu X.\phi'$ è adesso un parametro della formula ϕ', che quindi resta comunque un

enunciato). Dimostriamo dunque che se s è un tale punto allora I ha una strategia vincente anche per il gioco $G(\mu X.\phi', M, s)$.
Il punto iniziale del gioco ha un unico successore, (ϕ', s), dunque dopo la prima mossa si raggiunge questo vertice, in ogni partita. Da questo punto in poi il grafo ha tutti i vertici e gli archi del grafo del gioco $G(\phi', M[X/M_\mu], m)$. Inoltre, ogni vertice della forma (X, s') ha come successore $(\mu X.\phi', s')$; il primo vertice di questo tipo che viene raggiunto durante una partita corrisponde a un vertice senza successori nel gioco $G(\phi', M[X/M_\mu], s)$ (ovvero (X, s')). La strategia di I consiste sostanzialmente nel "copiare" la strategia che ha nel gioco $G(\phi', M[X/M_\mu], m)$. Se non raggiunge mai alcun vertice della forma (X, s') allora ha vinto, perché la partita ottenuta è una vera e propria copia della corrispondente partita in $G(\phi', M[X/M_\mu], m)$, in cui I vince. Se invece viene raggiunto un tale vertice, come già detto questo corrisponde a un vertice senza successori nel gioco $G(\phi', M[X/M_\mu], m)$. Visto che I vince, deve valere $(M, s', M_\mu) \models X$, cioè $s' \in M_\mu$. Per definizione di M_μ, dunque, da qui in poi I ha una strategia vincente. Dunque, dopo la mossa "obbligata" in $(\mu X.\phi', s')$, non gli resta che seguire tale strategia.
"$\supseteq$": Dobbiamo provare che M_μ è contenuto in ogni punto fisso. Supponiamo per assurdo che esista un punto fisso $M' \subseteq M$ e $m_0 \in M_\mu$ tale che $m_0 \notin M' = F_{\phi'}(M')$. Sia σ una strategia vincente per I nel gioco $G(\mu X.\phi', M, m_0)$ (esiste perché $m_0 \in M_\mu$). La restrizione di σ ai vertici del gioco $G(\phi', M[X/M'], m_0)$ non può essere una strategia vincente per I, perché $m_0 \notin F_{\phi'}(M')$ che è, per ipotesi induttiva, l'insieme dei punti a partire dai quali I ha una strategia vincente per gioco relativo alla formula ϕ' rispetto al modello $M[X/M']$. Sia allora π_0 una partita in cui I gioca seguendo σ ma II vince. Tale partita è necessariamente finita; se così non fosse, infatti, vorrebbe dire che non viene mai raggiunto un vertice del tipo (X, m'), dunque, escludendo la prima mossa, la partita sarebbe la "copia" di una partita del gioco $G(\mu X.\phi', M, m_0)$ che segue la strategia σ. Dunque si ha un assurdo perché I vince tutti i giochi in cui segue la strategia σ.
Inoltre, l'ultimo vertice giocato in π_0, nel gioco $G(\phi', M[X/M'], m_0)$ deve corrispondere a un vertice della forma (X, m_1). $m_1 \notin M'$ visto che II vince la partita. D'altra parte $m_1 \in M_\mu$: infatti $((\mu X.\phi', m_0), \pi_0, (\mu X.\phi', m_1))$ è un segmento iniziale di una partita del gioco $G(\mu X.\phi', M, m_0)$ in cui I segue σ. Dal lemma 43 sappiamo che I ha una strategia vincente anche per il gioco $G(\mu X.\phi', M, m_0) \downarrow (\mu X.\phi', m_1) = G(\mu X.\phi', M, m_1)$. Dunque $m_1 \in M_\mu$.
Ripetendo questo ragionamento, otteniamo induttivamente una successione $\{m_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ di punti di $M_\mu \setminus M'$ e una successione $\{\pi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ dove, per ogni i, π_i è una partita finita del gioco $G(\phi', M[X/M'], m_i)$ in cui I segue la restrizione di σ. Dunque, la seguente partita del gioco $G(\mu X.\phi', M, m_0)$

$$\pi = ((\mu X.\phi', m_0), \pi_0, (\mu X.\phi', m_1), \pi_1, (\mu X.\phi', m_2) \ldots)$$

è una partita in cui I segue σ, dunque è vinta da I. Ma la priorità più piccola che compare nel gioco $G(\mu X.\phi', M, m_0)$ è quella dei vertici del tipo $(\mu X.\phi', -)$; questa compare infinite volte nella partita ed è pari a 1, dunque in particolare è dispari, assurdo.

- Il caso in cui $\phi = \nu X.\phi'$ può essere ricondotto al caso precedente. Ripren-

dendo il ragionamento fatto nella dimostrazione del teorema 32, riusciamo infatti a costruire, dato un gioco di parità $G(\phi, M, m)$, un gioco $\bar{G}$ tale che I ha una strategia vincente in G se e solo se II ne ha una in $\bar{G}$. Basta infatti invertire V_I e V_{II} e porre $\bar{\Omega}((\psi, s)) = \Omega((\psi, s)) + 1$ se ψ è del tipo $\eta X.\psi'$ con $\eta \in \{\mu, \nu\}$, mentre, ad esempio, $\bar{\Omega}((\psi, s)) = \Omega((\psi, s)) = \alpha(\phi)$ negli altri casi.
Resta da osservare che, in tal modo, si ha $\bar{G} = G(\neg\phi, M, m)$. I nodi di $G(\neg\phi, M, m)$ sono tutti e soli i nodi del tipo $(\neg\psi, s)$ dove (ψ, s) è un nodo di $G(\phi, M, m)$, come si può verificare per induzione sul numero minimo di pasi da effettuare per andare dal nodo (ϕ, m) al nodo (ψ, s).
Analogamente si osserva anche che

$$(\neg\psi', s') \in (\neg\psi, s)\bar{E} \Leftrightarrow (\psi', s') \in (\psi, s)E,$$

dove $\bar{E}$ è l'insieme degli archi del grafo $G(\neg\phi, M, m)$. Dunque, sostanzialmente, la struttura di nodi e archi coincide, a meno di "rinomine".
Per quanto osservato quando è stato definito il grado di alternanza, possiamo scrivere ogni formula del tipo $\eta_1 X_1.\eta_2 X_2 \ldots .\eta_n X_n.\psi'$ con $\eta_i \in \{\mu, \nu\}$ per ogni i, come una formula in cui i simboli μ e ν sono "alternati". Inoltre possiamo far sì che il più interno sia ν, eventualmente aggiungendo una variabile quantificata che non compare in ψ. In tal modo, si verifica che, per ogni ψ sottoformula di ϕ del tipo $\eta X.\psi'$ si ha

$$\Omega((\neg\psi, s)) = \Omega((\psi, s)) + 1 = \bar{\Omega}((\psi, s)).$$

Per tutte le altre sottoformule, banalmente, si ha $\Omega((\neg\psi, s)) = \alpha(\phi) = \bar{\Omega}((\psi, s))$.
Infine si osserva che, in generale, una formula ψ è "di tipo I" se e solo se $\neg\psi$ è "di tipo II". Dunque $\bar{G}$ e $G(\neg\phi, M, m)$ coincidono. Ma allora le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. I ha una strategia vincente in $G(\nu X.\phi', M, m)$;
2. II ha una strategia vincente in $G(\mu X.\neg\phi'[X/\neg X], M, m)$;
3. $(M, m) \not\models \mu X.\neg\phi'[X/\neg X]$;
4. $(M, m) \models \nu X.\phi'$.

In particolare, la tesi segue dall'equivalenza tra il primo e l'ultimo punto. L'equivalenza tra gli altri due punti segue dalla determinatezza dei giochi di parità. È possibile arrivare alla tesi anche senza usare questo risultato, facendo un ragionamento analogo a quello fatto nel caso precedente ($\phi = \mu X.\phi'$).

$\square$

Capitolo 7

Giochi a infinite priorità

Abbiamo fin ora definito giochi su grafi in cui il codominio C della funzione di priorità Ω è finito. Vogliamo adesso estendere la definizione a giochi di parità in cui C è infinito, in particolare vedremo il caso $C = \omega$. Per definire tali giochi nell'ambito dei giochi su grafi definiti in generale nel capitolo 4, dobbiamo stabilire le condizioni di vittoria nel caso in cui nessuna priorità appare infinite volte nel corso della partita. Diciamo che I vince tutte le partite siffatte.

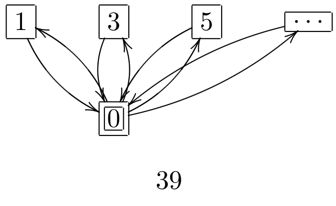
Lo scopo principale di questo capitolo è mostrare la determinatezza posizionale di tali giochi (nel caso $C = \omega$) [5]. Osserviamo intanto che la determinatezza segue dal fatto che gli insiemi di vincita sono boreliani. Infatti, definendo gli insiemi A^i_m e A_m come nel caso delle priorità finite, analogamente a quanto visto in quel caso l'insieme delle vincite è

$$X = \bigcap_{m:m \text{ dispari}} \left(\overline{A_m} \cup \bigcup_{k<m:k \text{ pari}} A_k \right),$$

che è dunque intersezione numerabile di unioni finite di insiemi Π^0_2 e Σ^0_2, dunque è un insieme di tipo Π^0_3.

Si tratta comunque di insiemi "più complicati" di quelli relativi ai giochi con un numero finito di priorità. D'altra parte, anche a livello intuitivo, nel caso di priorità infinite vi sono delle nuove difficoltà. La prima è la mancanza di "simmetria" tra i due giocatori, dovuta alle non più simmetriche condizioni di vittoria. La seconda è la sostanziale differenza con i *giochi di parità massima*. Tali giochi sono definiti come i giochi di parità, con la differenza che le condizioni di vittoria sono date dalla parità *massima* che compare infinite volte, anziché la minima. Nel caso di priorità finite è facile osservare che questi due giochi sono "intercambiabili". Diversa è la situazione del caso di priorità infinite, infatti i giochi di parità massima non ammettono, in generale, strategie vincenti a memoria finita.

Esempio 46.



In quest'esempio è facile osservare che I ha una strategia vincente da ogni vertice (riesce a fare in modo che solo la priorità 0 compaia infinite volte) ma nessuna strategia a memoria finita.

7.1 Determinatezza posizionale dei giochi di parità con $C = \omega$

La dimostrazione che daremo farà uso del μ-calcolo e del concetto di segnatura, come quella fatta nel capitolo 5. Sarà inoltre usato il concetto di albero $T_\sigma = (S, F)$ di una strategia σ per un dato giocatore g di un gioco G, ovvero l'albero di tutte le partite che iniziano in un vertice fissato v_0 e in cui g gioca seguendo σ. Tale albero può a sua volta essere visto come un grafo con un gioco associato, attraverso l'omomorfismo canonico $h : T_\sigma \to G$ dato da $h(v_0, \dots, v_n) = v_n$ per ogni n. In tal modo possiamo dotare l'albero di una funzione di priorità Ω' data da $\Omega' = \Omega \circ h$. Inoltre tutti i vertici di S che corrispondono a vertici di V_g secondo l'omomorfismo h hanno un solo successore in T_σ, mentre i successori di un vertice s che corrisponde a uno di $V_{\neg g}$ corrispondono a tutti e soli i successori che ha $h(s)$ nel grafo G.

Definiamo adesso le I- e II-segnature. Consideriamo la formula del μ-calcolo $\phi(X) = \nu Y.((\neg P \vee \Box X) \wedge (Q \vee \Box Y))$. Se P e Q sono parametri tali che in nessun vertice vale $P \wedge Q$, il significato delle approssimazioni della formula $\mu X.\phi(X)$ è il seguente:

- $\phi^0 = \bot$;
- $\phi^1 = \phi(\bot) = \nu Y.((\neg P \vee \Box\bot) \wedge (Q \vee \Box Y))$. Dunque v soddisfa ϕ^0 se e solo se in ogni cammino, a meno di non incontrare prima Q, ogni stato che soddisfa P è terminale;
- $\phi^2 = \phi(\phi(\bot)) = \nu Y.((\neg P \vee \Box\phi(\bot)) \wedge (Q \vee \Box Y))$. Dunque v soddisfa ϕ^0 se e solo se in ogni cammino, a meno di non incontrare prima Q, il secondo stato incontrato che soddisfa P è terminale;

  $\vdots$
- $\phi^{\alpha+1} = \phi(\phi^\alpha) = \nu Y.((\neg P \vee \Box\phi^\alpha) \wedge (Q \vee \Box Y))$. Dunque v soddisfa $\phi^{\alpha+1}$ se e solo se in ogni cammino, a meno di non incontrare prima Q, ogni stato che soddisfa P soddisfa anche $\Box\phi^\alpha$;

  $\vdots$
- $\phi^\lambda = \bigvee_{\beta<\lambda} \phi^\beta$ se λ è un ordinale limite;

  $\vdots$

Dunque, facendo uso della ricorsione transfinita è possibile osservare che un vertice soddisfa la formula $\mu X.\phi(X)$ se e solo se in nessun cammino che parte da tale vertice compare infinite volte P e mai Q.
Possiamo adesso definire per ogni $v \in V$ la funzione

$$\beta(v) = \begin{cases} \min\{\beta : (G, v) \models \phi^\beta\} \text{ se } (G, v) \models \mu X.\phi(X) \\ +\infty \text{ altrimenti} \end{cases}$$

ed estendiamo l'ordine $\leq$ tra gli ordinali ponendo $+\infty$ maggiore di qualsiasi ordinale.

Lemma 47. *Sia (M, m) un modello di Kripke e si consideri il sottografo di M costituito da tutti i cammini che partono da m. Se ogni suo vertice soddisfa la formula $\mu X.\phi(X)$, allora per ogni suo arco (s,t) tale che $(M,s) \not\models Q$ si ha $\beta(s) \geq \beta(t)$ e la diseguaglianza è stretta se $(M,s) \models P$.*

D'ora in poi estendiamo ogni gioco di parità con parametri proposizionali $Q_0, Q_1, \ldots$ tali che

$$(M, v) \models Q_i \Leftrightarrow v \text{ ha priorità } i.$$

Per ogni n, sia β_n la funzione ottenuta posto $P := Q_n$ e $Q := \bigvee_{m<n} Q_m$ nella formula $\phi(X)$. Sia adesso n' il più grande numero dispari minore o uguale a n per $n \geq 1$ e n'' il più grande numero pari minore o uguale a n. Allora, dato un albero di strategia T_σ definiamo le segnature per ogni vertice s dell'albero:

$$sig_n^I(s) := (\beta_1(s), \beta_3(s), \ldots, \beta_{n'}(s)),$$

$$sig_n^{II}(s) := (\beta_0(s), \beta_2(s) \ \ldots, \beta_{n''}(s)).$$

Per $g =$I, II scriviamo $s \leq_n^g t$ per indicare $sig_n^g(s) \leq sig_n^g(t)$ (secondo l'ordine lessicografico). Osserviamo che questi ordini parziali sono ben fondati e che $s <_n^i$ implica $s <_{n+1}^i$ per ogni n.

Lemma 48. *Sia σ una strategia vincente per I [II]. Allora per ogni arco (s,t) di T_σ si ha $t \leq_{\Omega(s)}^I s$ [$t \leq_{\Omega(s)}^{II} (s)$] e la diseguaglianza è stretta se $\Omega(s)$ è dispari [pari].*

Dimostrazione. Segue direttamente dal lemma 47. □

Teorema 49. *I giochi di parità con $C = \omega$ sono posizionalmente determinati.*

Dimostrazione. Supponiamo inizialmente che sia I ad avere una strategia vincente σ e costruiamone una posizionale vincente σ'. Sappiamo che per ogni n dispari, posto $P := Q_n$ e $Q := \bigvee_{m<n} Q_m$, per ogni vertice s dell'albero T_σ vale $(T_\sigma, s) \models \mu X.\phi(X)$. Quindi, per ogni nodo s di T_σ e n dispari è definito $\beta_n(s)$ (lemma 47), e dunque anche $sig_n^I(s)$ per ogni $n \geq 1$.
Sia adesso s una funzione che associa a ogni vertice v che abbia almeno un vertice corrispondente in T_σ un vertice $s(v) \in h^{-1}(v)$ con $sig_{\Omega(v)}^I$ minima, e poniamo $\beta_n(v) := \beta_n(s(v))$ per ogni n dispari. Se $v \in V_I$, sia $s'(v)$ il successore (unico) di $s(v)$. Data $\sigma' := h \circ s'$, mostriamo che è una strategia posizionale vincente per I. Sia, per assurdo, $\pi = (v_0, v_1, \ldots)$ una partita vinta da II in cui I gioca seguendo σ'. Sia n la più piccola priorità che appare infinite volte (che è dunque dispari), e sia j tale che nessun vertice che segue v_j nel cammino ha priorità minore di n, quindi in particolare $\Omega(v_j) \geq n$. Sia dunque $j' \geq j$, $s := s(v_{j'})$ e t il successore di s in T_σ tale che $h(t) = v_{j'+1}$. Si ha $sig_n^I(v_{j'}) = sig_n^I(s)$ e $sig_n^I(v_{j'+1}) \leq sig_n^I(t)$ per costruzione. Inoltre dal lemma 47 segue $\beta_m(s) \geq \beta_m(t)$ per ogni $m \leq n$ dispari con disuguaglianza stretta se $m = \Omega(s) = n$. Dunque

$$sig_n^I(v_{j'}) = sig_n^I(s) \geq sig_n^I(t) \geq sig_n^I(v_{j'+1})$$

con $sig_n^I(v_{j'}) > sig_n^I(v_{j'+1})$ se $\Omega(v_{j'}) = n$.
Sia $\{v_{k_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sottosuccessione della successione dei vertici rappresentante il cammino tale che $\Omega(v_{k_i}) = n$ per ogni $i \in \mathbb{N}$. Allora otteniamo una catena discendente infinita

$$sig_n^I(v_{k_1}) > sig_n^I(v_{k_2}) > \dots$$

assurdo, perché $<$ è un buon ordine. Allora σ' è una strategia vincente per I.

Trattiamo adesso il caso in cui è II ad avere una strategia vincente σ. Dato $T_\sigma = (S, F)$ definiamo per ogni suo vertice s e per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'*n-antenato* di s ($a_n(s)$) in $S \cup \{\perp\}$:

- Lo 0-*antenato* di s è il suo antenato più vicino di priorità 0, se esiste, altrimenti è $\perp$;
- L'*m-antenato* di s per $m > 0$ è il suo antenato più vicino di priorità m che sia un discendente di tutti i suoi j-antenati diversi da $\perp$ con $j < m$, se esiste, altrimenti è $\perp$.

Notiamo che $a_{\Omega'(s)} = s$. Per ogni $s \in S$, dato $m = \Omega'(s)$ definiamo $a(s) := (a_0(s), \dots, a_m(s))$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $\lhd_n$ un buon ordine su $S \cup \{\perp\}$ che estende $<_n^{II}$ e tale che $s \lhd_n \perp$ per ogni $s \in S$. Definiamo infine l'ordine $\prec_n$ sulle coppie di vertici (s, s') di priorità n. Diciamo che $s \prec_n s'$ se esiste $i \leq n$ tale che $a_i(s) \lhd_i a_i(s')$ e $a_j(s) = a_j(s')$ per ogni $j < i$. $\prec_n$ è un buon ordine perché tale è $\lhd_i$.
Sia adesso s una funzione che associa a ogni vertice v che abbia almeno un corrispondente in T_σ un vertice $s(v) \in h^{-1}(v)$ minimale rispetto a $\prec_{\Omega(v)}$, e poniamo $a(v) := a(s(v))$, indicando con $a_n(v)$ la sua componente n-esima (che coincide con $a_n(s(v))$), per ogni n. Se $v \in V_{II}$, sia $s'(v)$ il successore (unico) di $s(v)$. Definiamo $\sigma' := h \circ s'$ e mostriamo che è una strategia posizionale vincente per II.
Sia, per assurdo, $\pi = (v_0, v_1, \dots)$ una partita vinta da I in cui II gioca seguendo σ'. Sappiamo che $s(v_j)$ è definito per ogni j. Trattiamo prima il caso in cui nessuna priorità appare infinite volte. La funzione a_0 è (debolmente) decrescente secondo l'ordine $\prec_0$ nella "coda" della successione seguente l'ultimo vertice di priorità 0 (eventualmente coincidente con l'intera successione): dato j tale che v_j appartiene alla coda, siano $s := s(v_j)$ e t il successore di s in T_σ tale che $h(t) = v_{j+1}$. Si ha $a_0(v_j) = a_0(s)$ e $v_{j+1} \preceq_{\Omega(v_{j+1})} t$ per costruzione, dunque $a_0(v_{j+1}) \preceq_0 a_0(t)$. Inoltre $a_0(s) = a_0(t)$ perché $\Omega(v_{j+1}) \neq 0$, dunque $a_0(v_j) \succeq_0 a_0(v_{j+1})$. Dunque i vertici avranno definitivamente lo stesso 0-antenato a partire da un certo v_k appartenente alla coda di partenza, perché gli 0-antenati dei vertici della coda sono tutti uguali a $\perp$, oppure sono tutti diversi da $\perp$, ovvero hanno priorità 0, e $\prec_0$ è un buon ordine su tali vertici. Si può ripetere lo stesso ragionamento con la funzione a_1 e l'ordine $\prec_1$ nella successione $\{v_{k+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$, ottenendo un 1-antenato comune a tutti i vertici del cammino da un certo punto in poi, che è un discendente dello 0-antenato e non vi sono vertici di priorità 0 nel cammino che porta da uno all'altro. Continuando a procedere in tal modo otteniamo un cammino nell'albero T_σ in cui nessuna priorità appare infinite volte, dunque la partita ottenuta è vinta da I, assurdo.
Supponiamo invece che la minima priorità p che appare infinite volte sia pari, e sia j tale che nessun vertice che segue v_j nel cammino ha priorità minore

di p. Facendo un ragionamento analogo al caso precedente (in cui nessuna priorità appare infinite volte) otteniamo che definitivamente a partire da un certo v_k con $k \geq j$ tutti i vertici hanno lo stesso q-antenato per ogni $q < p$. Sia dunque $k' \geq k$, $s := s(v_{k'})$ e t il successore di s in T_σ tale che $h(t) = v_{k'+1}$. Si ha $a_p(v_{k'}) = a_p(s)$. Inoltre, per costruzione, $s(v_{k'+1}) \prec_{\Omega(v_{k'+1})} t$. Sapendo inoltre che i q-antenati, per $q < p$, si sono stabilizzati sul cammino, abbiamo che $a_q(v_{k'}) = a_q(v_{k'+1}) = a_q(t) = a_q(s)$, per ogni $q < p$. Quindi $a_p(v_{k'+1}) \prec_p a_p(t)$. Poiché $a_p(t) = t$ se $\Omega(t) = p$ e $a_p(t) = a_p(s)$ se $\Omega(t) \neq p$, dal lemma 48 segue $a_p(t) <_p^{II} a_p(s)$ con uguaglianza solo se $\Omega(t) \neq p$. Dunque

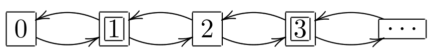
$$a_p(v_{k'}) = a_p(s) \succeq_p a_p(t) \succeq_p a_p(v_{k'+1})$$

e $a_p(v_{k'}) \succ_p a_p(v_{k'+1})$ se $\Omega(v_{k'+1}) = p$.
Sia $\{v_{k_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sottosuccessione della successione dei vertici rappresentante il cammino tale che $\Omega(v_{k_i}) = p$ per ogni $i \in \mathbb{N}$. Allora otteniamo una catena discendente infinita

$$a_p(v_{k_1}) \succ_p a_p(v_{k_2}) \succ_p \ldots$$

assurdo, perché $\prec_p$ è un buon ordine. Allora σ' è una strategia vincente per II.
$\square$

Esempio 50. Consideriamo il seguente esempio



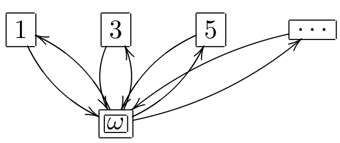
Sia, per ogni i, v_i l'unico vertice di priorità i. Si osserva facilmente che qualunque sia il vertice di partenza v_{k_0} I ha una strategia vincente σ in tale gioco. Un esempio è la strategia (non posizionale) data da:

$$\sigma(v_{k_0}, \ldots, v_{k_r}) = \begin{cases} v_{k_r+1} \text{ se } k_i \neq k_r \text{ per ogni } i < r \\ v_{k_r-1} \text{ altrimenti} \end{cases}$$

per ogni r-upla tale che k_r sia dispari. Fissato v_{k_0} consideriamo T_σ e, utilizzando le stesse notazioni del teorema 49, sia $\sigma' = h \circ s$. Tale strategia posizionale è data da $\sigma'(v_i) = v_{i-1}$ per ogni i dispari. È facile osservare che si tratta di una strategia vincente.

Osserviamo infine che il risultato non si può generalizzare a ordinali strettamente maggiori di ω. Tali giochi sono definiti ponendo la parità di un dato α uguale a quella di n, dove n è l'unico naturale che permette di scrivere $\alpha = \lambda + n$ dove λ è un ordinale limite.

Esempio 51. Il seguente esempio è costruito in maniera analoga all'esempio 46.



È facile osservare che I ha una strategia vincente da ogni vertice (riesce a fare in modo che solo la priorità ω compaia infinite volte) ma nessuna strategia a memoria finita.

Bibliografia

[1] Julius Richard Büchi, *Using determinacy to eliminate quantifiers,* Fundamentals of Computation Theory, Lecture Notes in Computer Science, vol. 56, Springer-Verlag, pp. 367–378, 1977;

[2] Vincenzo Dimonte, *Determinatezza dei giochi boreliani e analitici,* Tesi di laurea Università di Udine, 2005/06;

[3] Ernest Allen Emerson, Charanjit Jutla, *Tree automata, mu-calculus and determinacy (extended abstract),* Proceedings of the 32nd Annual Symposium on Foundations of Computer Science, FoCS '91, IEEE Computer Society Press, pp. 368–377, 1991;

[4] Erich Grädel, Wolfgang Thomas, Thomas Wilke, *Automata Logics, and Infinite Games,* Springer, 2002;

[5] Erich Grädel, Igor Walukiewicz, *Positional determinacy of games with infinitely many priorities,* Logical Methods in Computer Science Vol. 2 (4:6) pp. 1-22, 2006.

[6] Yuri Gurevich, Leo Harrington, *Trees, automata and games,* Proceedings of the 14th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, STOC '82, ACM Press, pp. 60–65, 1982;

[7] Dexter Kozen, *Results on the propositional mu-calculus,* Theoretical Computer Science 27, pp. 333–354, 1983;

[8] Donald Martin, *Borel determinacy,* Annals of Mathematics 102, 363– 371, 1975;

[9] Jan Mycielski, *On the axiom of determinateness, Part II* Fundamenta Mathematica Vol. 53, pp. 203-212, 1964;

[10] Igor Walukiewicz, *Monadic second-order logic on tree-like structures,* Institute of Informatics, Warsaw University, 2001;

[11] Wieslaw Zielonka, *Infinite games on finitely coloured graphs with applications to automata on infinite trees,* Theoretical Computer Science 200, no. 1–2, pp. 135–183, 1998;